單元 1 弧度量　　二年____班　座號：____　姓名：

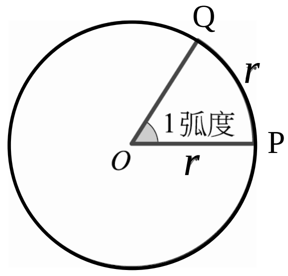
重點 1：度(°)度量與弧度量(弳度)的關係

意義：衡量一個角的大小除了使用「**角度**(degree)」之外，亦可使用「**弧度(弳度)** (radian)」來度量其大小

1.弧度定義：弧度量是一種用弧長來表示「**角**」的大小之方法

設圓 O 的半徑為 r，在圓周上取一段弧 PQ，使得圓弧 PQ 的弧長等於 r，如右圖

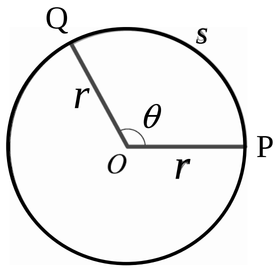
則規定弧 PQ 所對的圓心角 $\angle POQ$ 的弧度大小稱為 1 **弳**



註：$\theta=\dfrac{\pi}{3}$ 弧度＝60°，常把「弧度」兩字省略不寫

2.弧長與弳的關係：

設圓 O 的半徑為 r，弧長 PQ 為 s，如右圖



則弧長 s 所對圓心角為 θ 弳時，s 與半徑 r 的比值 $\dfrac{s}{r}$，即 $\theta=\dfrac{s}{r}$

3.換算公式：

圓的弧長(圓周長)為 $2\pi r$，其所對的圓心角為 $\dfrac{2\pi r}{r}=2\pi=360°$，$\Rightarrow$ $\boxed{\pi \text{ 弧度}=180°}$，圓周率 $\pi\approx3.14159$

即 $\boxed{1\text{ 度}=\dfrac{\pi}{180}\text{ 弳}}\approx0.0175$ 弳

$\boxed{1\text{ 弳}=\dfrac{180}{\pi}\text{ 度}}\approx\left(\dfrac{180}{3.14159}\right)^{\circ}\approx57.2958°$ 弧度

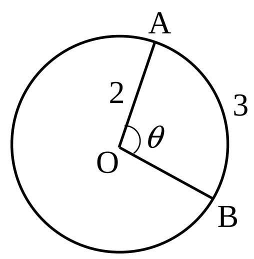
$\boxed{\underline{\text{關係式}}：\dfrac{\text{度}}{180^{0}}=\dfrac{\text{弧度}}{\pi}\ \text{或}\ \text{度}\times\dfrac{\pi}{180^{0}}=\text{弧度}}$

4.度與弳的同界角：

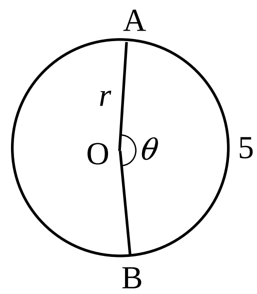
若兩廣義角 θ、ϕ 互為同界角，

則 θ 與 ϕ 相差 360°的整數倍，或 2π 的整數倍

例 1.1：如右圖，設圓半徑為 2，且弧長 $\overset{\frown}{AB}=3$，則圓心角 $\theta=$____弳

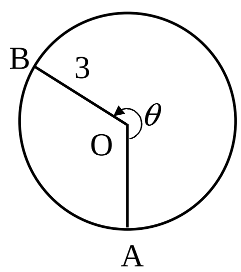


Ex1.1：如右圖，設圓半徑為 r，且弧長 $\overset{\frown}{AB}=5$，圓心角 θ 為 3 弳，則 $r=$____



例 1.2：半徑為 3 的圓輪轉動一圈，則轉動的圓心角為______弳；若轉動 2 圈，則轉動的圓心角為______弳

Ex1.2：半徑為 3 的圓輪轉動 $\dfrac{2}{3}$ 圈，轉動的圓心角為______弳



例 1.3：求 60°與 110°分別等於多少弳？

Ex1.3：求 80°與 140°分別等於多少弳？

Ex1.31：將下列度換成弧度：(1) 1200°　　(2)－210°

例 1.4：求 $\frac{3\pi}{5}$ 弳與 2 弳分別等於多少度？

Ex1.4：求 $\frac{2\pi}{5}$ 弳與 $\frac{5\pi}{9}$ 弳分別等於多少度？

Ex1.41：將下列弧度轉換成度：(1) $\frac{7\pi}{5}$ 弳　　(2) $-\frac{5\pi}{4}$ 弳　　(3) 3 弳

例 1.5：(1)求－1200°是多少弳？　　(2)求 $\frac{50\pi}{3}$ 弳是多少度？

Ex1.5：完成下表中度與弳的換算：

度	0°	30°		60°	90°		135°	150°			360°
弳	0		$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$		$\frac{2\pi}{3}$			π	$\frac{3\pi}{2}$	

例 1.6：下列哪些弧度角與$\frac{\pi}{3}$弳互為同界角？(1)$\frac{7\pi}{3}$弳　(2)$-\frac{\pi}{3}$弳　(3)$\frac{5\pi}{3}$弳　(4)$-\frac{11\pi}{3}$弳

Ex1.6：下列哪些為$-\frac{2\pi}{3}$弳的同界角？ (1)$\frac{2\pi}{3}$弳　(2)$\frac{4\pi}{3}$弳　(3)$-\frac{8\pi}{3}$弳　(4)$\frac{10\pi}{3}$弳

例 1.7：如右圖，設$\theta=\frac{2\pi}{3}$弳，則θ的最小正同界角為______與最大正同界角為______(用弳表示)

Ex1.7：設$\theta=20$弳，則θ的最小正同界角為______與最大正同界角為______(用弳表示)

Ex1.71：設$\theta=-200^\circ$，則下列哪些角是θ的同界角？(多選)

(1)$\frac{2\pi}{9}$弳　(2)$-\frac{2\pi}{9}$弳　(3)$\frac{8\pi}{9}$弳　(4)$\frac{26\pi}{9}$弳　(5)$-\frac{28\pi}{0}$弳

Ex1.71：設$\theta=1260^\circ$，則θ的最小正同界角為______與最大正同界角為______(用弳表示)

例 1.8：關於度與弧度的換算，下列選項哪些正確？(多選)

(1) $180^\circ=\pi$弳　(2)3 弳＞180°　(3)若$\theta=5$弳，則θ為第二象限角

(4) $100^\circ=100$弳　(5)$\frac{3\pi}{5}$弳$=108^\circ$

Ex1.8：設$\theta=10$弳，關於θ的同界角，下列選項哪些正確？(多選)

(1) $(\theta+\pi)$弳是θ的同界角　(2)$(\theta-2\pi)$弳θ是的同界角　(3)-10弳是θ的同界角

(4) $(\theta+10\pi)$弳是θ的同界角　(5)θ的同界角均為第二象限角

Ex1.81：設θ是第二象限角，則$\dfrac{\theta}{2}$是第幾象限角？

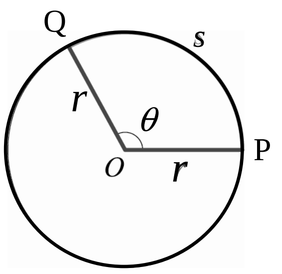
重點 2：弧長與扇形面積

1.弧長：

設圓O的半徑為r，弧長 PQ 為s，如右圖，

則弧長s所對圓心角為θ弳時，s與半徑r的比值$\dfrac{s}{r}$，即$\theta=\dfrac{s}{r}$

得知弧長公式$\boxed{s=r\theta}$



2.扇形面積：

(1)扇形面積 A：圓面積πr^2＝圓心角為θ弳：2π弳，即$\dfrac{A}{\pi r^2}=\dfrac{\theta}{2\pi}$，得知扇形面積 A＝$\dfrac{1}{2}r^2\theta$

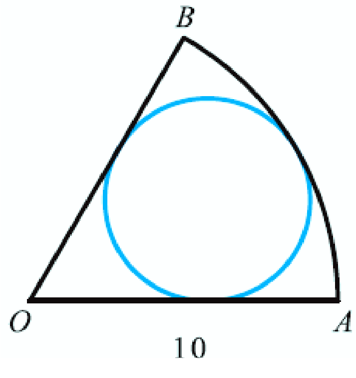
(2) A＝$\dfrac{1}{2}r^2\theta$，且$s=r\theta$，得知扇形面積 A＝$\dfrac{1}{2}rs$，即$\boxed{A=\dfrac{1}{2}r^2\theta=\dfrac{1}{2}rs}$

例 2.1：已知扇形的半徑為 10，圓心角為 72°，求扇形的弧長與面積

Ex2.1：已知扇形的半徑為 6，弧長為4π，求扇形的圓心角與面積

例 2.2：如右圖，扇形的圓心角 60°，半徑為 10，設此扇形的周長為a，面積為b，內切圓的半徑為c，

則$a+b+c$ ＝_____

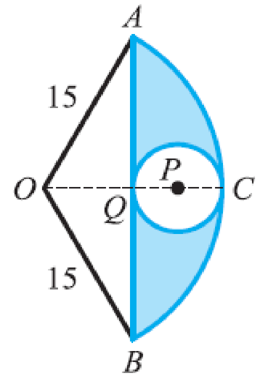


Ex2.2：右圖扇形 $O-ACB$ 中，C 是 $\overset{\frown}{AB}$ 的中點，弓形 ABC 的內切圓圓心為 P。

已知 $\overline{OA}=\overline{OB}=15$，弧長 $\overset{\frown}{AB}=10\pi$，則：

(1)∠AOB＝______徑

(2)鋪色區域的面積為_____

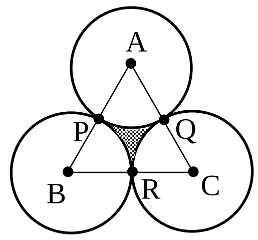


例 2.3：如右圖，大小相同半徑為 2 的三個圓互相外切，其中 A，B，C 為三個圓的圓心，且 P，Q，R 為切點，則：

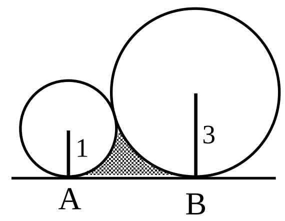
(1)求∠A 的弧度為_____　(A)$\frac{\pi}{2}$徑　(B)$\frac{\pi}{3}$徑　(C)$\frac{\pi}{4}$徑　(D)$\frac{\pi}{5}$徑

(2)鋪色區域的周長為_____

(3)鋪色區域的面積為_____

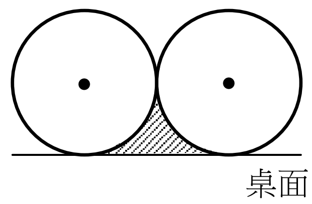


Ex2.3：如右圖，已知半徑分別為 1 與 3 的兩圓外切，且直線 AB 為其外公切線，求鋪色區域的周長與面積



Ex2.31：桌面上有兩顆大小相同的棒球，半徑為 5 公分。棒球與桌面兩兩相切，其截面示意圖如右，

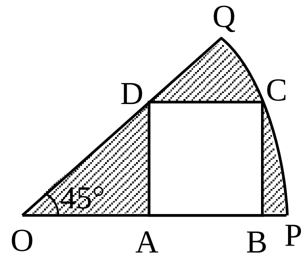
則鋪色區域面積為多少平方公分？



例 2.4：如右圖，扇形 OPQ 的圓心角為 45°，半徑為 5，$ABCD$ 為扇形的內接正方形，則

(1)正方形的邊長為______

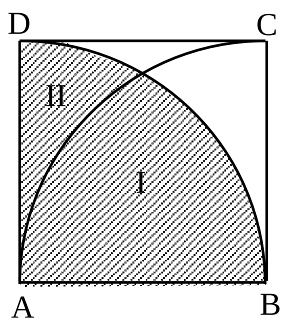
(2)鋪色區域的面積為______



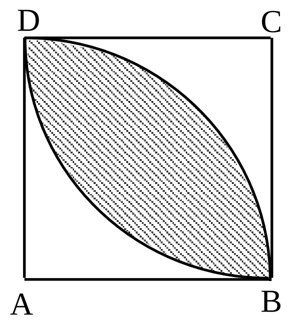
Ex2.4：如右圖，$ABCD$ 為正方形，邊長為 4。分別以 A，B 為圓心，4 為半徑畫弧，兩弧的交點為 P 點，則：

(1)區域 I 的面積為_______

(2)區域 II 的面積為_______



Ex2.41：如右圖，$ABCD$ 為正方形，邊長為 4，以 B，D 為圓心，4 為半徑畫弧，則鋪色區域面積為何？

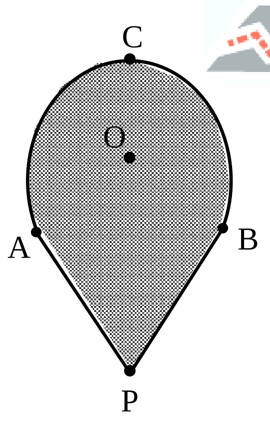


例 2.5：右上圖藍色的標誌是在網路地圖上常見的定位記號，它的輪廓是由圓弧與兩條與圓相切的線段所組成，如右下圖所示，其中 $\overline{PA}$ 與 $\overline{PB}$ 為圓 O 的切線。已知∠APB＝60°，且半徑為 1，求：

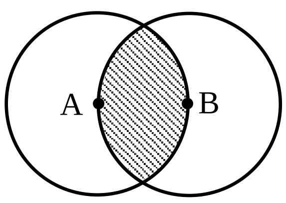
(1) $\overset{\frown}{ACB}$ 所對的圓心角之弧度值

(2) $\overline{PA}$ 與 $\overline{PB}$ 的長度

(3)鋪色區域的面積

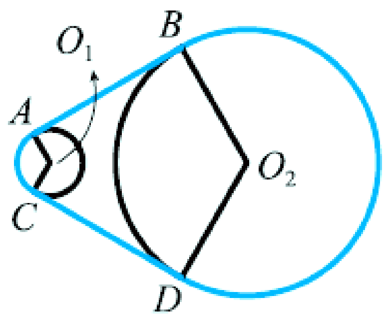


Ex2.5：如右圖，已知兩個半徑為 6 的圓彼此通過另一圓的圓心 A，B，求鋪色區域的面積

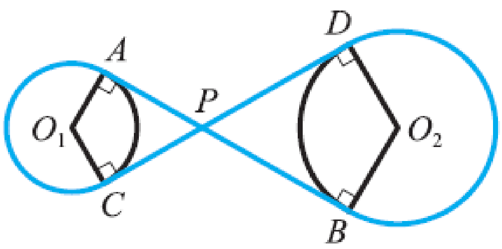


例 2.6：國際貨運公司要從貨機上把包裹快速地運送到貨車上，通常要靠輸送帶才能夠省時省力。若有一輸送帶的設計圖如右所示，皮帶緊繞著大小兩輪軸，大輪軸心為 O_2，小輪軸心為 O_1，而 $\overline{AB}$，$\overline{CD}$ 為皮帶拉直的部分。設圖中大小輪軸的半徑分別是 40 公分，10 公分，而兩輪軸的中心點相距 60 公分，則：

(1) $\overline{AB}=$_____　　(2)皮帶總長度為_____



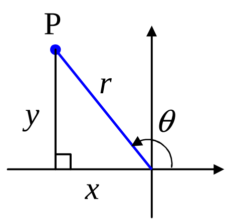
Ex2.6：如右圖，兩圓輪的半徑分別為 2 公分，3 公分，兩圓心的連線距離為 10 公分。今以皮帶交叉緊繞兩圓輪，則皮帶的總長度為_____公分



重點 3：以弳為單位的三角比

1.廣義角的三角比：

如右圖，$\overline{OP}=r$，θ(弳)為廣義角，$sin\,\theta=\dfrac{y}{r}$　$cos\,\theta=\dfrac{x}{r}$　$tan\,\theta=\dfrac{y}{x}$



2.角 θ 以弳表示時，會將弳省略，如：$sin(\dfrac{\pi}{3}$弳$)=sin\dfrac{\pi}{3}=sin\,60°$

3.利用計算機計算時，必先將計算機設定為「RAD」模式

例 3.1：求下列各式的值：(1) $\sin\dfrac{\pi}{4}$　　(2) $\cos\dfrac{2\pi}{3}$　　(3) $\tan\dfrac{5\pi}{4}$

Ex3.1：求下列各式的值：(1) $\sin\dfrac{\pi}{2}$　　(2) $\cos(-\dfrac{\pi}{3})$　　(3) $\tan\dfrac{\pi}{6}$

Ex3.11：求下列各式的值：(1) $\sin\dfrac{7\pi}{6}$ (2) $\cos\dfrac{5\pi}{3}$ (3) $\tan(-\dfrac{\pi}{3})$

例 3.2：求下列各式的值：(1) $\sin\dfrac{\pi}{2}$ (2) $\cos\pi$ (3) $\tan 2\pi$

Ex3.2：下列哪些不等式**成立**？

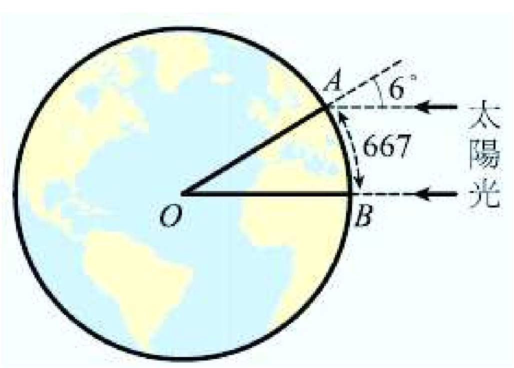
(1) $\sin\pi > \sin\pi^\circ$ (2) $\cos\pi > \cos\pi^\circ$ (3) $\cos\pi^\circ > \sin\pi^\circ$ (4) $\tan\pi > \tan\pi^\circ$ (5) $\sin\dfrac{\sqrt{3}}{2} < \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

Ex3.21：試比較 $\cos 3$ 與 $\cos 3°$的大小關係

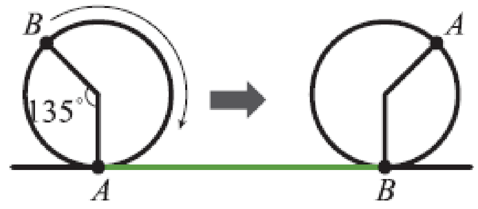
例 3.3：設 O 為地球球心，已知 A 與 B 兩地測得的距離為 667 公里，且兩地的太陽光入射角分別為 6°與 0°，其示意圖如右，問：

(1)圓心角$\angle AOB$ 為多少弳？

(2)地球的半徑約為多少公里？(四捨五入到整數位)

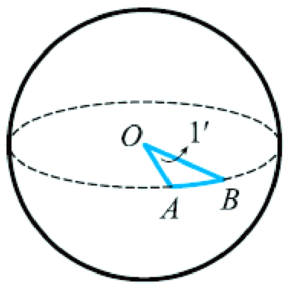


Ex3.3：如右圖左，設半徑為 80 公分的車輪上有 A，B 兩點，且 $\overset{\frown}{AB}$ 所對的圓心角為 135°。將車輪的 A 點置於地面，開始往右滾動；當車輪的 B 點第一次接觸地面時停止，如右圖右所示，問此時車輪前進的距離為多少公分？(四捨五入到整數位)

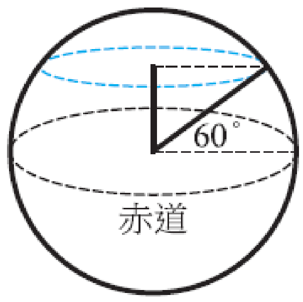


例 3.4：已知地球是個球體，地球赤道上與地心 O 夾角為 1′(讀作 1 分)的兩地 A，B 之間的弧長稱為 1 浬，其中 1°＝60′，如右圖所示。設赤道的半徑長為 6370 公里，

那麼 1 浬大約是______公里(取至小數點第一位，以下四捨五入)(已知 $\frac{\pi}{180}\approx 0.01745$)

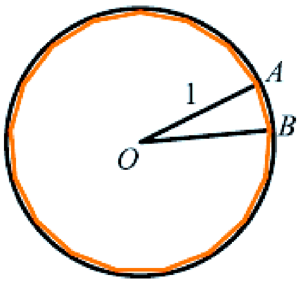


Ex3.4：如右圖所示，設有一個地球儀，其赤道長度為 100 公分，則此地球儀上，北緯 60°的緯線長度為______公分



例 3.5：已知正十七邊形會徽的外接圓半徑為 1，如右圖所示，求：

(1)扇形 AOB 的弧長　　(2)正十七邊形邊長 AB 的值　(四捨五入到小數點以下第 4 位)



Ex3.5：圓內接正六邊形 $A_1A_2\cdots A_6$，試求 $\dfrac{\overset{\frown}{A_1A_2}}{\overline{A_1A_2}}=$_____(取至小數點第 2 位，以下四捨五入)