Ch 3.3 面積與二階行列式　　二年____班　座號：____　姓名：

重點 1：二階行列式(determinant)

意義：設 a，b，c，d 皆為實數，符號$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$稱為**二階行列式**，它所代表的數為 $ad-bc$，即$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}=ad-bc$

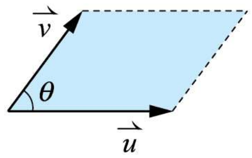
例 1.1：試求下列各二階行列式的值：

(1) $\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}$　　(2) $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{vmatrix}$

重點 2：二階行列式的應用(求面積)

1.意義：利用二階行列式可以表示平行四邊形面積與三角形的面積

2.平行四邊形面積：

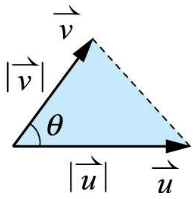


(1)如右圖，由兩不平行的非零向量 $\vec{u}$ 、 $\vec{v}$ ，夾角為 θ，所張成的**平行四邊形面積**

$=|\vec{u}||\vec{v}|\sin\theta=|\vec{u}||\vec{v}|\sqrt{1-\cos^2\theta}=\sqrt{|\vec{u}|^2\cdot|\vec{v}|^2-(\vec{u}\cdot\vec{v})^2}$

(2)設 $\vec{u}=(a，b)$與 $\vec{v}=(c，d)$，則所張成的平行四邊形面積$=\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$的絕對值，即$\left|\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}\right|=\left||ad-bc|\right|$

3.三角形面積：



(1)如右圖，由兩不平行的非零向量 $\vec{u}$ 、 $\vec{v}$ ，夾角為 θ，所張成的**三角形面積**

$=\frac{1}{2}|\vec{u}||\vec{v}|\sin\theta=\frac{1}{2}|\vec{u}||\vec{v}|\sqrt{1-\cos^2\theta}=\frac{1}{2}\sqrt{|\vec{u}|^2\cdot|\vec{v}|^2-(\vec{u}\cdot\vec{v})^2}$

(2)設 $\vec{u}=(a，b)$與 $\vec{v}=(c，d)$，則所張成的三角形面積$=\frac{1}{2}\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$的絕對值，即$\frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}\right|=\frac{1}{2}\left||ad-bc|\right|$

註：若 $\vec{u}\,//\,\vec{v}$ ，則$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}=0$，即由 $\vec{u}$ 、 $\vec{v}$ 張成的平行四邊形面積、三角形面積皆為 0

◎幾何類型

例 2.1：設 $\vec{u}$ 、 $\vec{v}$ 為平面上兩個向量且$|\vec{u}|=2$，$|\vec{v}|=3$，$\vec{u}\cdot\vec{v}=4$，試求：

(1)由 $\vec{u}$ 、 $\vec{v}$ 所張成的三角形面積　　(2)由 $\vec{u}$ 、 $\vec{v}$ 所張成的平行四邊形面積

◎代數坐標類型

例 2.2：(1)試求由 $\vec{a}=(2，1)$，$\vec{b}=(4，5)$所張成的平行四邊形面積

(2)設ΔABC 中三頂點坐標為 A(2，1)，B(1，－2)，C(4，－1)，試求ΔABC 的面積

重點 3：兩向量平行的判定

意義：設 $\overrightarrow{a}=(x_1,\ y_1)$與 $\overrightarrow{b}=(x_2,\ y_2)$為坐標平面上任意兩個非零向量，若 $\overrightarrow{a}\ //\ \overrightarrow{b}$，則 $\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}=0$，反之亦成立

註：幾何上：設兩向量 $\overrightarrow{a}$ 與 $\overrightarrow{b}$，若存在實數 $k\neq 0$，使得 $\overrightarrow{a}=k\overrightarrow{b}$，則稱 $\overrightarrow{a}$ 平行 $\overrightarrow{b}$，記作 $\overrightarrow{a}\ //\ \overrightarrow{b}$

代數上：設兩向量 $\overrightarrow{a}=(x_1,\ y_1)$與 $\overrightarrow{b}=(x_2,\ y_2)$，若 $\dfrac{x_1}{x_2}=\dfrac{y_1}{y_2}$ 或 $x_1y_2=x_2y_1$ (兩向量的分量成比例)，則 $\overrightarrow{a}\ //\ \overrightarrow{b}$

例 3.1：設向量 $\overrightarrow{a}=(k-5，2)$，$\overrightarrow{b}=(k+1，-1)$，若 $\overrightarrow{a}\ //\ \overrightarrow{b}$，試求 k 的值

例 3.2：設直線 L_1：$3x+(2k+1)y=12$ 與 L_2：$x+(k+3)y=1$ 平行，試求實數 k 的值

重點 4：二階行列式性質

1.定義：二階行列式 $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$ 中，橫的稱為**列**，直的稱為**行**，共有 2 列 2 行，

其中 a，b 是**第一列**，c，d 是**第二列**；a，c 是**第一行**，b，d 是**第二行**

$$\begin{array}{ccc} \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} & \begin{array}{l} \longleftarrow \text{第一列} \\ \longleftarrow \text{第二列} \end{array} \\ \begin{array}{cc} \uparrow & \uparrow \\ \text{第一行} & \text{第二行} \end{array} & \end{array}$$

2.二階行列式的值：$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}=ad-bc$

3.二階行列式的性質：

(1)行、列互換其值不變：$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix}$

註：以 a，d 為軸，將行列式翻面其值不變：$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix}$

(2)兩行(兩列)對調，其值變號：(兩行對調) $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}=-\begin{vmatrix} b & a \\ d & c \end{vmatrix}$　(兩列對調) $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}=-\begin{vmatrix} c & d \\ a & b \end{vmatrix}$

(3)任一行(列)可以提出公因數：(第一行提出 k) $\begin{vmatrix} ka & b \\ kc & d \end{vmatrix}=k\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$　(第二列提出 k) $\begin{vmatrix} a & b \\ kc & kd \end{vmatrix}=k\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$

註：任一行(列)乘上 k 倍，其值變為 k 倍

(4)兩行(兩列)成比例，其值為 0：(第一二行成 k 倍) $\begin{vmatrix} a & ka \\ c & kc \end{vmatrix}=0$　(第一二列成 k 倍) $\begin{vmatrix} ka & kb \\ a & b \end{vmatrix}=0$

(5)將一行(列)的 k 倍加到另一行(列)，其值不變：$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a & b+ka \\ c & d+kc \end{vmatrix}$　$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a+kc & b+kd \\ c & d \end{vmatrix}$

(6)若某一行(列)的每個元素可分成兩行(列)元素的和，則此行列式可拆分為兩個行列式的和：

$$\begin{vmatrix} a+e & b \\ c+f & d \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} e & b \\ f & d \end{vmatrix}\qquad \begin{vmatrix} a+e & b+f \\ c & d \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} e & f \\ c & d \end{vmatrix}$$

◎基本定義運算

例 4.1：求下列各行列式的值：(1) $\begin{vmatrix} 5 & -2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}$　　(2) $\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ -5 & 7 \end{vmatrix}$

◎提公因數

例 4.2：試求行列式$\begin{vmatrix} 64 & 96 \\ 201 & 301 \end{vmatrix}$的值

例 4.3：已知行列式$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}=5$，$\begin{vmatrix} e & b \\ f & d \end{vmatrix}=2$，試求行列式$\begin{vmatrix} a+3e & 2b \\ c+3f & 2d \end{vmatrix}$的值

重點 5：兩直線幾何關係的代數判定與<u>克拉瑪</u>公式(Cramer's rule)

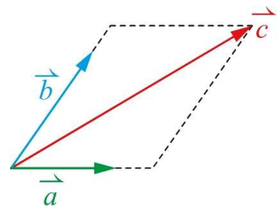
設二元一次聯立方程式$\begin{cases} a_1x+b_1y=c_1 \\ a_2x+b_2y=c_2 \end{cases}$，即表示坐標平面上兩直線 L_1：$a_1x+b_1y=c_1$與 L_2：$a_2x+b_2y=c_2$的關係

且 L_1、L_2的一法向量分別為$\overrightarrow{n_1}=(a_1，b_1)$、$\overrightarrow{n_2}=(a_2，b_2)$，則：

令$\Delta=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}=a_1b_2-a_2b_1$，　$\Delta_x=\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}=c_1b_2-c_2b_1$，　$\Delta_y=\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}=a_1c_2-a_2c_1$

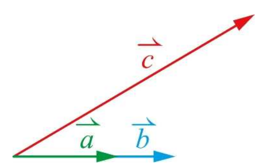
註：Δ 讀作 *delta*，　Δ_x讀作 *delta x*，　Δ_y讀作 *delta y*

(1)當$\Delta=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}=a_1b_2-a_2b_1\neq 0$時，即$\overrightarrow{n_1}$與$\overrightarrow{n_2}$不平行時，表示兩直線 L_1、L_2交於**一點**



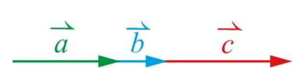
　$\Rightarrow$得唯一解$(x，y)=(\dfrac{\Delta_x}{\Delta}，\dfrac{\Delta_y}{\Delta})$稱為聯立方程式的**<u>克拉瑪</u>公式解**

(2)當$\Delta=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}=a_1b_2-a_2b_1=0$ 時，即$\overrightarrow{n_1}$與$\overrightarrow{n_2}$平行時，得知：



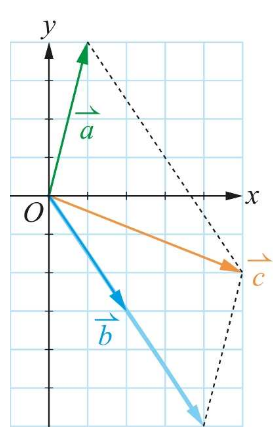
　(i)但是$\Delta_x\neq 0$ 或$\Delta_y\neq 0$ 時，則兩直線 L_1、L_2平行，聯立方程式$\begin{cases} a_1x+b_1y=c_1 \\ a_2x+b_2y=c_2 \end{cases}$無解

　(ii)但是$\Delta_x=\Delta_y=0$ 時，則兩直線 L_1、L_2重合，聯立方程式$\begin{cases} a_1x+b_1y=c_1 \\ a_2x+b_2y=c_2 \end{cases}$有無限多組解



◎線性組合與二元一次方程組

例 5.1：已知二元一次方程組$\begin{cases} x+2y=5 \\ 4x-3y=-2 \end{cases}$，則：



(1)試將此方程組表示為向量線性組合的形式
(2)求解此方程組
(3)圖解釋 x，y 在向量線性組合的意義

例 5.2：試利用克拉瑪公式，解二元一次聯立方程式$\begin{cases}9x+10y=11\\11x+12y=13\end{cases}$

重點 6：克拉瑪公式(Cramer's rule)的幾何意義

意義：在線性組合 $x\overrightarrow{a}+y\overrightarrow{b}=\overrightarrow{c}$ 中，若 x，$y>0$，則：

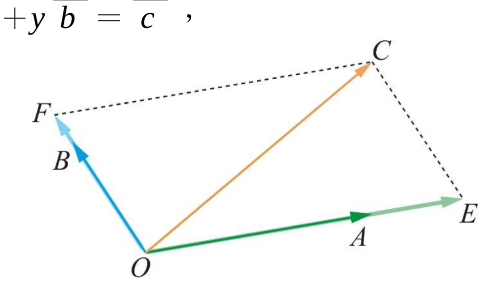
$$(x，y)=\left(\frac{\overrightarrow{c}，\overrightarrow{b}\text{ 所張成的平行四邊形面積}}{\overrightarrow{a}，\overrightarrow{b}\text{ 所張成的平行四邊形面積}}，\frac{\overrightarrow{a}，\overrightarrow{c}\text{ 所張成的平行四邊形面積}}{\overrightarrow{a}，\overrightarrow{b}\text{ 所張成的平行四邊形面積}}\right)$$

例 6.1：如圖，$\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{a}$，$\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{b}$，$\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{c}$，若 $\overrightarrow{OE}=x\overrightarrow{a}$，$\overrightarrow{OF}=y\overrightarrow{b}$，且 $x\overrightarrow{a}+y\overrightarrow{b}=\overrightarrow{c}$，

已知 $\overrightarrow{a}$，$\overrightarrow{b}$ 所張成的平行四邊形面積為 5；

$\overrightarrow{a}$，$\overrightarrow{c}$ 所張成的平行四邊形面積為 6；

$\overrightarrow{b}$，$\overrightarrow{c}$ 所張成的平行四邊形面積為 7，則 y 的值為何？



重點 7：兩直線幾何關係的代數判定

設二元一次聯立方程式$\begin{cases}a_1x+b_1y=c_1\\a_2x+b_2y=c_2\end{cases}$，即表示坐標平面上兩直線 L_1：$a_1x+b_1y=c_1$ 與 L_2：$a_2x+b_2y=c_2$ 的關係

且 L_1、L_2 的一法向量分別為 $\overrightarrow{n_1}=(a_1，b_1)$、$\overrightarrow{n_2}=(a_2，b_2)$，則：

1.當 $\frac{a_1}{a_2}\neq\frac{b_1}{b_2}$ 時，兩直線 L_1、L_2 交於**一點**，聯立方程式得唯一解$(x，y)$，稱此方程組為相容方程組

2.當 $\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}\neq\frac{c_1}{c_2}$ 時，兩直線 L_1、L_2 平行，聯立方程式無解，稱此方程組為矛盾方程組

3.當 $\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}=\frac{c_1}{c_2}$ 時，兩直線 L_1、L_2 重合，聯立方程式有無限多組解，稱此方程組為相依方程組

例 7.1：試就 a 的值，討論兩直線 L_1：$ax+y=1$ 與 L_2：$9x+ay=3$ 的幾何關係