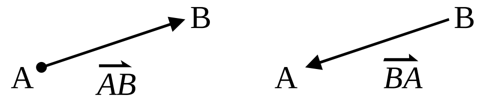
Ch 3.1 平面向量的表示法　　　　二年____班　座號：____　姓名：

重點 1：純量(scalar)與向量(vector)

1.純量：利用(數值)+(單位)所表示的量，稱為**純量**

2.有向線段：有一質點 P，從 A 移動到 B，則 P 點所經過之軌跡形成一「有向線段」$\overrightarrow{AB}$，A 稱為起點，B 稱為終點

$\overrightarrow{AB}$：①表示具「大小」($|\overrightarrow{AB}| = \overline{AB}$) 與②「方向」(由 A 到 B)



註：(1) $\overrightarrow{AB} \neq \overrightarrow{BA}$　　(2) $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{BA}$　($-\overrightarrow{AB}$ 稱為 $\overrightarrow{AB}$ 的逆向量)

(3) $|\overrightarrow{AB}|$ 稱為有向線段 $\overrightarrow{AB}$ 的長度

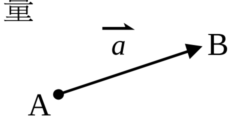
3.向量：

有向線段中，忽略其起點，即表為**向量**；而且有向線段的方向代表向量的方向；有向線段的長度代表向量的大小即向量同時具有大小與方向的量。但是「向量可隨意**平移**」,「有向線段卻**不可以平移**」

重點 2：向量(vector)

1.意義：平面上以 A 為起點，B 為終點，則有向線段 $\overrightarrow{AB}$ 表示方向從 A 到 B，大小為 $|\overrightarrow{AB}| = \overline{AB}$ 的向量

其中 $\overrightarrow{AB}$ 讀做：向量 AB，或 AB 向量



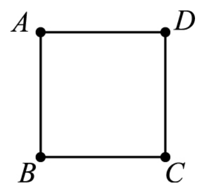
註：向量考慮大小與方向，不計較其所在位置，為了方便，也以單一文字如 $\overrightarrow{a}$，$\overrightarrow{b}$ 來表示向量

2.向量相等：當兩個向量 $\overrightarrow{AB}$ 與 $\overrightarrow{CD}$ 的「**長度相等**」，而且「**方向相同**」時，稱這兩個向量**相等**，記作 $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$

3.零向量：始點與終點重合之有向線段，如 $\overrightarrow{AA}$ 所代表的向量稱為**零向量**，以 $\overrightarrow{0}$ 、$\overrightarrow{BB}$ 、$\overrightarrow{PP}$ 等表示

註：零向量 $\overrightarrow{0}$ 的大小為 0，其方向可視為任意方向 (即 $\overrightarrow{0}$ 不規定它的其方向)

例 2.1：如右圖所示，將正方形 $ABCD$ 的四個邊賦予方向，共可得到幾個不同的向量？



重點 3：向量的幾何加法運算

1.加法：

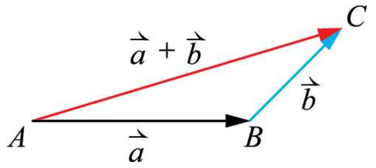
(1)三角形法：(終點接起點)

①求 $\overrightarrow{AB}$ 與 $\overrightarrow{BC}$ 相加時，$\overrightarrow{AB}$ 的終點與 $\overrightarrow{BC}$ 的起點連接，則 $\overrightarrow{AB}$ 的起點至 $\overrightarrow{BC}$ 的終點為 $\overrightarrow{AC}$，即 $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$

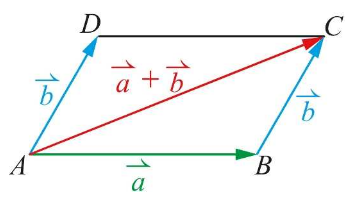
相同

②求 $\overrightarrow{a}$ 與 $\overrightarrow{b}$ 相加時，作有向線段 $\overrightarrow{AB}$ 代表向量 $\overrightarrow{a}$，過 B 點作有向線段 $\overrightarrow{BC}$ 代表向量 $\overrightarrow{b}$

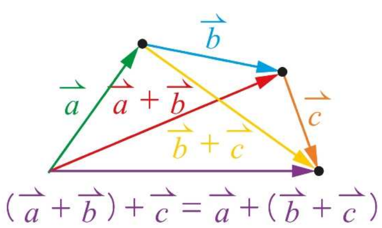
則有向線段 $\overrightarrow{AC}$ 所代表的向量即為向量 $\overrightarrow{a}$ 與 $\overrightarrow{b}$ 的和，即 $\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b} = \overrightarrow{AC}$

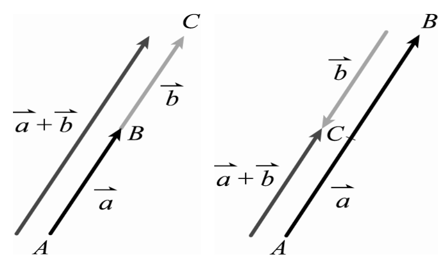


三角形法



平行四邊形法





(2)平行四邊形法：(起點相同)

求 $\overrightarrow{a}$ 與 $\overrightarrow{b}$ 相加時，過點 A 作有向線段 $\overrightarrow{AB}$ 代表向量 $\overrightarrow{a}$，再過 A 點作有向線段 $\overrightarrow{AD}$ 代表向量 $\overrightarrow{b}$

以 $\overline{AB}$ 與 $\overline{AD}$ 為鄰邊作一平行四邊形 $ABCD$。因為 $\overrightarrow{BC}$ 與 $\overrightarrow{AD}$ 方向相同且大小相等，所以 $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{b}$

因此平行四邊形對角線上之有向線段 $\overrightarrow{AC}$ 所代表的向量就是 $\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}$

2.向量加法的基本性質：

(1)向量加法有**交換律**：對於任意兩向量 $\vec{a}$ 與 $\vec{b}$，則 $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$

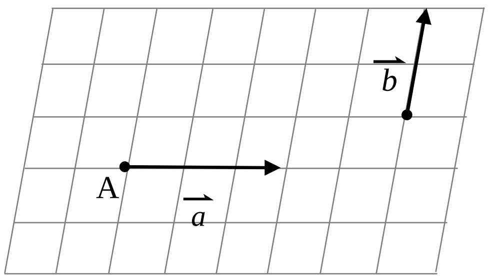
(2)向量加法有**結合律**：對於任意三向量 $\vec{a}$，$\vec{b}$ 與 $\vec{c}$，則$(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$

(3)向量加法**單位元素**：對於任向量 $\vec{a}$，使得 $\vec{a}+\vec{0}=\vec{0}+\vec{a}$，稱 $\vec{0}$ 為向量加法單位元素

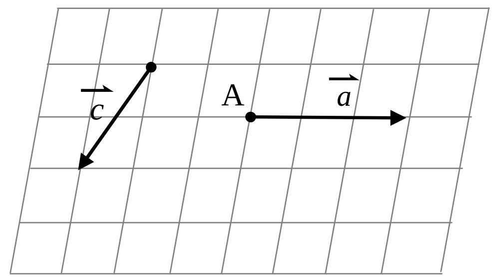
(4)向量加法**反元素**：對於任向量 $\vec{a}$，使得 $\vec{a}+(-\vec{a})=\vec{0}$，稱$(-\vec{a})$為向量加法反元素

例 3.1：右圖中的網格為二組兩兩平行的直線組合，且每一小格都是菱形，試以 A 點為始點畫出 $\vec{a}+\vec{b}$ 與 $\vec{a}+\vec{c}$

(1) $\vec{a}+\vec{b}$

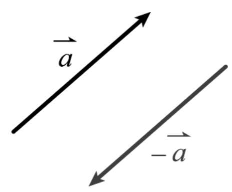


(2) $\vec{a}+\vec{c}$



重點 4：向量的減法與拆解

1.向量的逆向量：與 $\vec{a}$ 方向相反，但長度相等的向量，稱為 $\vec{a}$ 的逆向量，記作$-\vec{a}$，如右圖

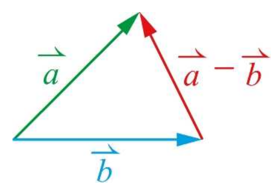


2.向量的減法：利用逆向量做加法運算，即減去一個向量就等於加上這個向量的逆向量

⇒對於任意兩向量 $\vec{a}$，$\vec{b}$，利用 $\vec{a}+(-\vec{b})$來定義 $\vec{a}-\vec{b}$

或 $\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{CB}+(-\overrightarrow{CA})=\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{AB}$

密技：① $\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{AB}$ (起點相同，終點回頭)　　② $\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AB}$ (終點相同，起點順向)



3.向量的拆解：

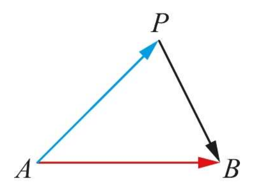
設 A，B，C 為任意三點。向量 $\overrightarrow{AB}$ 可拆解如下：

(1)加法拆解：$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CB}$

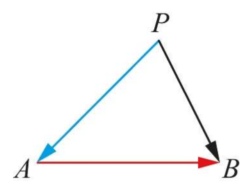
(2)減法拆解：

①起點相同：$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{CA}$　(記法：**起**點相同，**終**點回頭)

②終點相同：$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{BC}$　(記法：終點相同，**起**點順向)



$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{PB}$



$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{PB}-\overrightarrow{PA}$

例 4.1：已知 $ABCD$ 為四邊形，化簡下列各式：(1) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DA}$　　(2) $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BC}$

重點 5：向量的係數積(scale product)(向量的倍數)

1.定義：給定實數 r 及向量 $\vec{a}\neq\vec{0}$，實數 r 與向量 $\vec{a}$ 的乘積，稱為向量的**係數積**(向量 $\vec{a}$ 的 r 倍)，記作 $r\vec{a}$

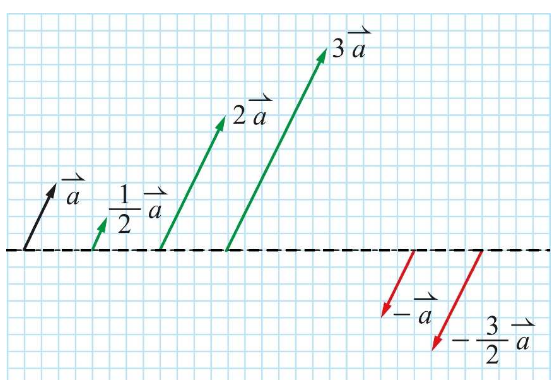
其中 $r\vec{a}$ 是一個向量，且 $r\neq 0$ 時，$r\vec{a}\,//\,\vec{a}$，其方向與大小如下：

(1)當 $r>0$ 時，$r\vec{a}$ 的方向與 $\vec{a}$ 的方向相同，其大小為 $r|\vec{a}|$

(2)當 $r<0$ 時，$r\vec{a}$ 的方向與 $\vec{a}$ 的方向相反，其大小為 $|r||\vec{a}|$

(3)當 $r=0$ 時，$r\vec{a}$ 為零向量，即 $r\vec{a}=\vec{0}$

註：若 $\vec{a}=\vec{0}$，則 $r\vec{a}=\vec{0}$



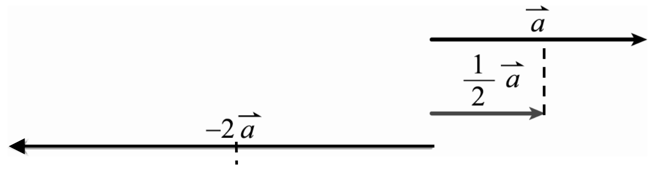
2.向量係數積的基本性質：設 r，s 為實數，$\overrightarrow{a}$，$\overrightarrow{b}$ 為任意向量，則：

(1)分配性：$(r+s)\overrightarrow{a}=r\overrightarrow{a}+s\overrightarrow{a}$

(2)結合性：$r(s\overrightarrow{a})=(rs)\overrightarrow{a}$

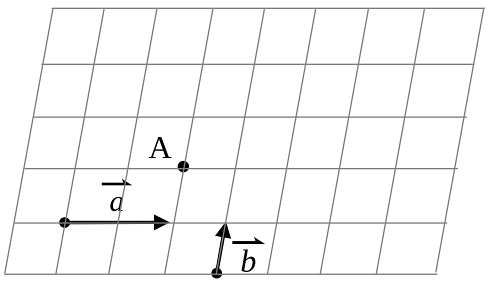
(3)分配性：$r(\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b})=r\overrightarrow{a}+r\overrightarrow{b}$

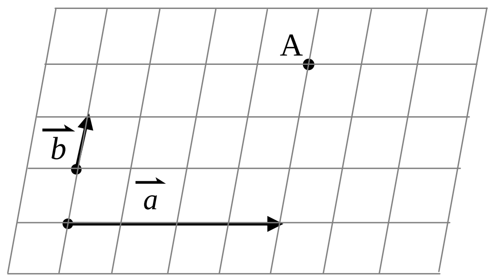
(4)長度：$|k(r\overrightarrow{a})|=|kr||\overrightarrow{a}|$



例 5.1：下圖中的網格為二組兩兩平行的直線組合，且每一小格都是菱形，試以 A 點為始點畫出下列各向量：

(1) $2\overrightarrow{a}+2\overrightarrow{b}$　　(2) $\frac{1}{2}\overrightarrow{a}-3\overrightarrow{b}$



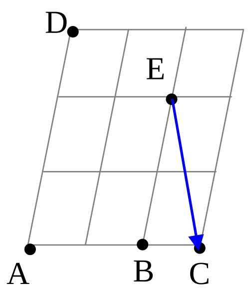


重點 6：向量的組合

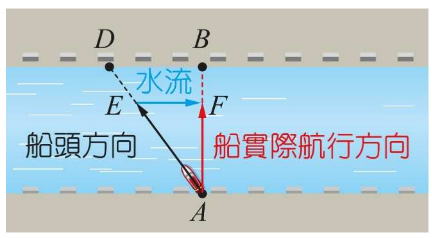
向量的組合：利用向量的加減法與係數積，可以將一個向量寫成其他向量的組合

設 $\overrightarrow{a}$，$\overrightarrow{b}$，$\overrightarrow{c}$ 皆不平行之三個相異向量，則存在實數 x，y，使得 $\overrightarrow{c}=x\overrightarrow{a}+y\overrightarrow{b}$ 稱為向量的組合

例 6.1：如圖，九個相同的平行四邊形拼成的圖形中，若 $\overrightarrow{EC}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AD}$，試求 x，y 之值



例 6.2：如圖所示，在寬度為 300 公尺的河流中，水流速度是每秒 3 公尺，船速是每秒 5 公尺，如果從河岸 A 處將船頭朝 D 處方向航行，可開到正對岸 B 處，試求共需要多少秒？



重點 7：向量的坐標表示法(代數)

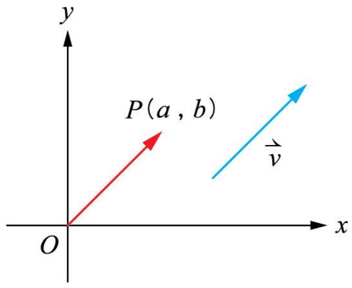
1.意義：對於坐標平面上的任意一個向量 $\vec{v}$，可以將 $\vec{v}$ 平移，使其始點落在原點 O 上，終點落在坐標為 $P(a，b)$

則可以利用 P 點的坐標$(a，b)$來表示向量 $\vec{v}$，記為 $\vec{v}=\overrightarrow{OP}=(a，b)$

在 $\vec{v}=(a，b)$中，a 與 b 分別稱為向量 $\vec{v}$ 的 **x 分量**與 **y 分量**

註：(1) $\vec{v}=(a，b)$稱為 $\vec{v}$ 的坐標表示法

(2)若 $\vec{v}$ 的起點落在原點 O 上，稱此向量為**標準位置向量**



2.向量 $\vec{v}$ 的長度：

設 $\vec{v}=(a，b)$，則其長度記為 $|\vec{v}|=\sqrt{a^2+b^2}$

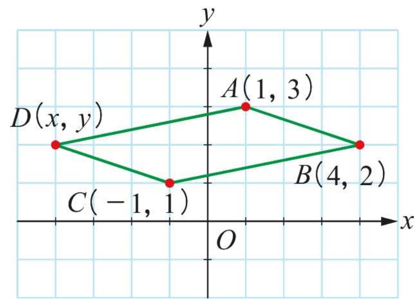
3.向量的坐標表示：

設坐標平面上兩點 $A(a_1，a_2)$，$B(b_1，b_2)$，則：

(1) $\overrightarrow{AB}=(b_1-a_1，b_2-a_2)$　　(2) $\overrightarrow{AB}$的長度$=|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{(b_1-a_1)^2+(b_2-a_2)^2}$

例 7.1：給定平面上三點 $A(1，3)$，$B(4，2)$，$C(-1，1)$，試求：

(1)向量 $\overrightarrow{AB}$ 及 $\overrightarrow{BC}$　　(2)若 $ABCD$ 為平行四邊形，試求 D 點的坐標



重點 8：向量的代數(坐標)運算(加減法)

若 $\vec{a}=(a_1，a_2)$，$\vec{b}(b_1，b_2)$，則：

1.向量的加法運算：$\vec{a}+\vec{b}=(a_1+b_1，a_2+b_2)$

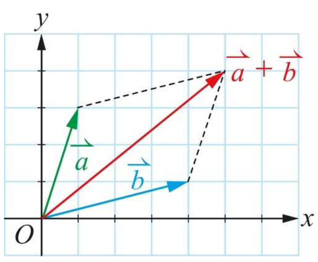
2.向量的減法運算：

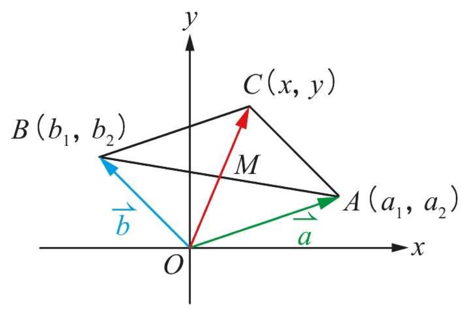
(1)$-\vec{a}=-(a_1，a_2)=(-a_1，-a_2)$

(2) $\vec{a}-\vec{b}=(a_1-b_1，a_2-b_2)$

3.向量的係數積：

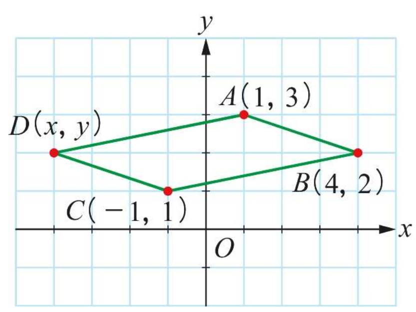
設 k 為的實數，則 $k\vec{a}=k(a_1，a_2)=(ka_1，ka_2)$





例 8.1：給定平面上三點 $A(1，3)$，$B(4，2)$，$C(-1，1)$，試求：

(1)向量 $\overrightarrow{AB}$、$\overrightarrow{BC}$及 $\overrightarrow{AC}$　　(2)檢查 $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}$與 $\overrightarrow{AC}$ 是否相等



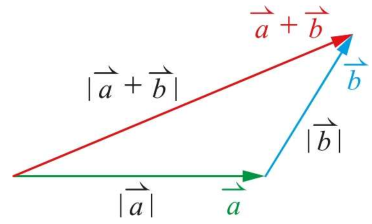
例 8.2：設向量 $\vec{a}=(-1，2)$，$\vec{b}=(3，4)$，$\vec{c}=(1，3)$，試求：(1)$2\vec{a}+\vec{b}-3\vec{c}$　　(2) $|2\vec{a}+\vec{b}-3\vec{c}|$

重點 9：三角不等式

1.定義：設 $\vec{a}$ ，$\vec{b}$ 為任意兩向量，則 $|\vec{a}+\vec{b}|\le|\vec{a}|+|\vec{b}|$ 稱為**向量**的**三角不等式**

其中當 $\vec{a}$ ，$\vec{b}$ 同方向時，$|\vec{a}+\vec{b}|=|\vec{a}|+|\vec{b}|$ 成立

註：如右圖，在三角形中，即兩邊長之和 ≥ 第三邊長



2.實數的三角不等式：

設 x，y 為任意兩實數，則 $|x+y|\le|x|+|y|$ 稱為**實數**的**三角不等式**

當 x，y 同為正數或負數(平行)時，$|x+y|=|x|+|y|$ 成立

例 9.1：已知 $|\vec{a}|=4$，$|\vec{b}|=3$，試求 $|\vec{a}+\vec{b}|$ 最大的可能範圍

重點 10：向量的平行

1.定義：設 $\vec{a}$ 與 $\vec{b}$ 是平面上的兩個非零向量，若 $\vec{a}=k\vec{b}$ ，k 為非零實數，則稱 $\vec{a}$ 與 $\vec{b}$ 平行，記作 $\vec{a}\,//\,\vec{b}$

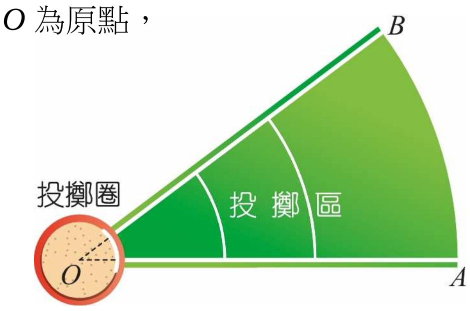
2.性質：

(1)當兩非零向量平行時，兩向量必同方向或反方向

(2)在 $\vec{a}=k\vec{b}$ 中，當 $k>0$ 時，$\vec{a}$ 與 $\vec{b}$ 同方向；當 $k<0$ 時，$\vec{a}$ 與 $\vec{b}$ 反方向

例 10.1：如圖所示，鉛球比賽場地中，如果不計標線的寬度，建立一直角坐標系，使 O 為原點，

A，B 兩點的坐標分別為(10，0)，(8，6)，試求 $\overrightarrow{AB}$ 的中點坐標

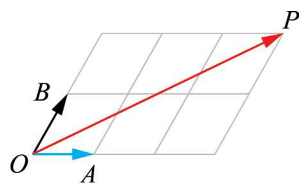


重點 11：向量的線性組合

1.意義：若 $\overrightarrow{OA}$ 和 $\overrightarrow{OB}$ 為平面上兩個不平行的非零向量，則平面上的每一個向量 $\overrightarrow{OP}$ 都可以

唯一表示成 $\overrightarrow{OP}=x\overrightarrow{OA}+y\overrightarrow{OB}$ 的形式，x，y 為實數，稱 $\overrightarrow{OP}$ 為向量的**線性組合**

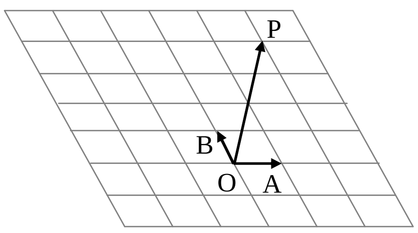
2.在 $\overrightarrow{OP}=x\overrightarrow{OA}+y\overrightarrow{OB}$ 中，若 x，y 有限制範圍，則 P 也會落在某個範圍中

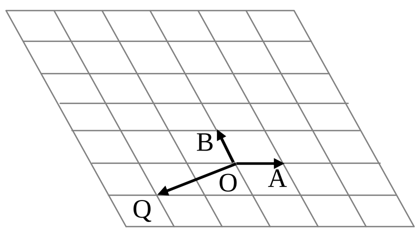


例 11.1：(1)如圖，$\overrightarrow{OP}=$___$\overrightarrow{OA}+$___$\overrightarrow{OB}$ ，$\overrightarrow{OQ}=$___$\overrightarrow{OA}+$___$\overrightarrow{OB}$

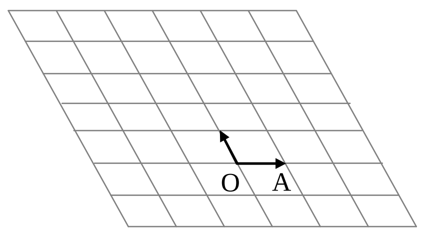
(2)若 $\overrightarrow{OC}=-\overrightarrow{OA}+3\overrightarrow{OB}$ ，試在平面上標出點 C 的位置

(1)



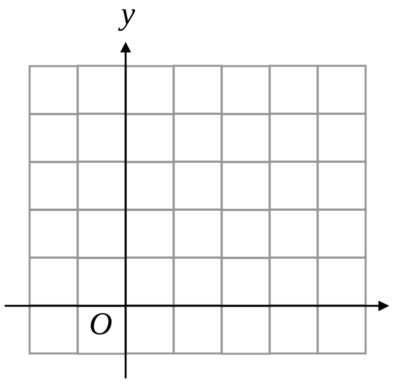


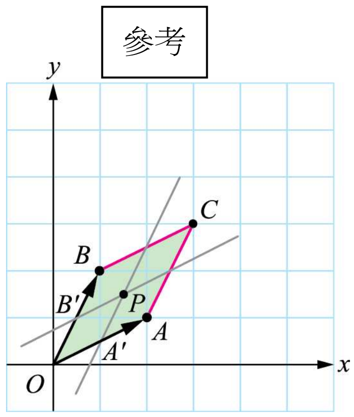
(2)



例 11.2：試將 $\overrightarrow{OP}=(4，3)$ 寫成 $\overrightarrow{OA}=(1，2)$ 和 $\overrightarrow{OB}=(2，-1)$ 的線性組合

例 11.3：設 $\overrightarrow{OA}=(2，1)$，$\overrightarrow{OB}=(1，2)$，若 $\overrightarrow{OP}=x\overrightarrow{OA}+y\overrightarrow{OB}$，且 $0\le x\le 1$，$0\le y\le 1$，x，y 為實數，試在平面上標示出所有 P 點所形成的區域

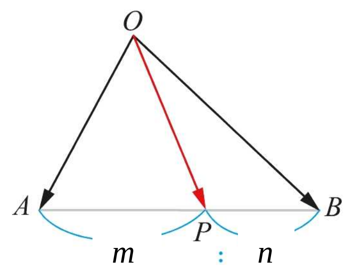




重點 12：向量的分點公式

1.分點公式：若 P 為 ΔOAB 中 $\overline{AB}$ 邊上一點，且 $\overline{AP}：\overline{PB}=m：n$，(P 點為 $\overline{AB}$ 上的比例點)，如下圖所示

則 $\overrightarrow{OP}=\dfrac{n}{m+n}\overrightarrow{OA}+\dfrac{m}{m+n}\overrightarrow{OB}$，此關係為**分點公式**



註：若 P 為 $\overline{AB}$ 之中點，則 $\overrightarrow{OP}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{OA}+\dfrac{1}{2}\overrightarrow{OB}$

2.分點坐標表示：

設 $\overrightarrow{OA}=(a_1，a_2)$，$\overrightarrow{OB}=(b_1，b_2)$則 $\overrightarrow{OP}=\dfrac{n}{m+n}\overrightarrow{OA}+\dfrac{m}{m+n}\overrightarrow{OB}=(\dfrac{na_1+mb_1}{m+n}，\dfrac{na_2+mb_2}{m+n})$

3. ΔABC 的重心性質：

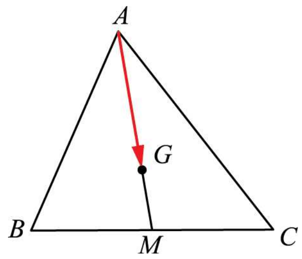
設 G 為 ΔABC 的重心，O 為任意一點，則：

(1)若 $\overrightarrow{AG}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\dfrac{1}{3}\overrightarrow{AC}$

(2) $\overrightarrow{OG}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{OA}+\dfrac{1}{3}\overrightarrow{OB}+\dfrac{1}{3}\overrightarrow{OC}$

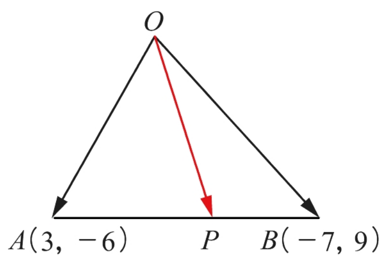
(3) $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\overrightarrow{0}$

(4)若 $A(x_1，y_1)$，$B(x_2，y_2)$，$C(x_3，y_3)$，則重心 $G(\dfrac{x_1+x_2+x_3}{3}，\dfrac{y_1+y_2+y_3}{3})$



例 12.1：已知 O，A，B 三點不共線，點 P 在 $\overline{AB}$ 上，且 $\overline{AP}：\overline{PB}=2：5$，設 $\overrightarrow{OP}=x\overrightarrow{OA}+y\overrightarrow{OB}$，試求 x，y

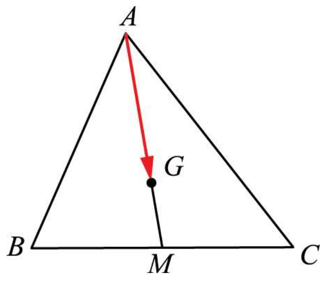
例 12.2：設 $A(3，-6)$，$B(-7，9)$為平面上相異兩點，P 為 $\overline{AB}$ 上一點，且滿足 $\overline{AB}：\overline{BP}=3：2$，試求 P 點的坐標



例 12.3：設 G 為△ABC 的重心，O 為平面上任一點，則：

(1)若 $\overrightarrow{AG}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AC}$，試求 x，y 之值

(2)承(1)，試由第(1)題的結果導出 $\overrightarrow{OG}=\frac{1}{3}\overrightarrow{OA}+\frac{1}{3}\overrightarrow{OB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{OC}$



重點 13：直角坐標與極坐標

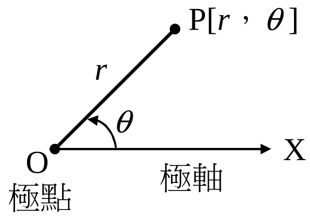
1.極坐標定義：

(1)若在平面上選定一點 O (稱為原點或極點，簡稱極)，以 O 為端點向右作一水平射線 OX (稱為極軸，簡稱軸)，則稱為極坐標

(2)對於平面上異於 O 的任一點 P，如右圖

設 $\overline{OP}=r>0$，且若以極軸為始邊，射線 OP 為終邊的廣義角度數為 θ，$0°\leq\theta<360°$

則用符號 P[r，θ]表示 P 點的位置，[r，θ]稱為 P 點的一個極坐標



(3)若已知直角坐標點 P(x，y)，則極坐標為 P [r，θ]，其中 $r=\sqrt{x^2+y^2}$，$\cos\theta=\frac{x}{r}$，$\sin\theta=\frac{y}{r}$

例 13.1：一公路依地形迂迴而建，如圖所示。從 O 地到 A 地、A 地到 B 地、B 地到 C 地的距離分別是 2、6、4 公里，而 $\overline{OA}$ 與 $\overline{AB}$，$\overline{AB}$ 與 $\overline{BC}$ 間，兩公路的夾角均為 120°，試求 C 地到 O 地的直線距離