Ch 2.4 指數與對數函數的應用 二年____班 座號：____ 姓名：

重點 1：對數的首數與尾數

1.意義：任意正實數 a 都可以用 $a=k\times10^{n}$，$1\le k<10$，n 是整數的形式來表示，稱為**科學記號**表示法

2.首數與尾數：

將正實數 a 表為**科學記號** $a=k\times10^{n}$，$1\le k<10$ 後，再取對數：$\log a=n+\log b$，其中 n 為整數，$0\le\log b<1$，則整數 n 稱為 $\log a$ 的**首數**，$\log b$ 稱為 $\log a$ 的**尾數**

3.性質：

(1)當正實數 $a\ge1$ 時，其首數為 $n\ge0$，則：

表示 a 的整數部分為$(n+1)$位數；其最高位(最左邊)數字，則由尾數來決定

(2)當正實數 $0<a<1$，其首數 $n<0$，則：

表示 A 在小數點後第 n 位開始出現不為 0 的數字；其最高位(最左邊)數字，則由尾數來決定

例 1.1：已知 $\log 1.68\approx0.2253$，則：

(1)利用科學記號表示 16800，並求其首數與尾數

(2)利用科學記號表示 0.00168，並求其首數與尾數

例 1.2：試求 2^{100} 是幾位數？最高位數字是多少？

例 1.3：試將 2^{-100} 寫成小數後，求其小數點後第幾位數字才開始不為 0？開始不為 0 的數字是多少？

例 1.4：將 $\dfrac{5^{50}}{9^{100}}$ 表為純小數時，試問小數點後第幾位才開始出現不為 0 的數字？

例 1.5：2017 年日本的一家出版社發行了一本書 2017 年最大の素數。這本書全書內容只印了一個數字 $2^{77232917}-1$ 即當時人類已知的最大質數。該書供不應求，榮登數學類暢銷書的第一名。請問：

(1)這個數是幾位數？

(2)展開後最高位數字是多少？

重點 2：金融上的應用

1.單利與複利：設本金是 P，年利率是 r，每年計息一次，則：

(1)若以**單利**計算：每年固定增加利息 Pr，n 年後的本利和＝$P(1+nr)$

(2)若以**複利**計息：則每年的本利和是前一年的$(1+r)$倍，故 n 年後的本利和 $P(1+r)^n$

2.零存整付：指的是每期存入(或買入)一筆定額的錢，在複利計算下到了某個時間點一次贖回的行為

若每期購入 a 萬元，在固定報酬率 r %的複利計算下，n 期後可以領回的本利和(利用等比級數計算)

$$=a(1+r\%)^n+a(1+r\%)^{n-1}+\cdots+a(1+r\%)^2+a(1+r\%)=a(1+r\%)\times\frac{(1+r\%)^n-1}{r\%}$$

3.尤拉數 e

當 $n\to\infty$ 時，$(1+\frac{1}{n})^n\to \mathrm{e}=2.718281828\cdots$是一個無理數

註：以 e 為底的對數 $\log_e x$，記為 $\ln x$，稱為自然對數

例 2.1：有一保險公司銷售一種儲蓄險，存入 100 萬元，每年有 20000 元的紅利，期滿 20 年可取回本利和。另有銀行提供 100 萬元，年利率 2 %，每年複利計息一次的 20 年定存，試問那一個方案的獲利方式較佳？

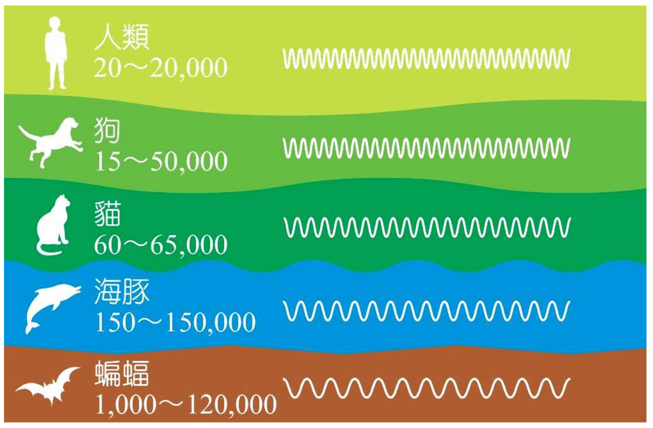
例 2.2：小明每年固定購買某證券 10 萬元，在年報酬率 8 %的情況下，他至少需要多少年，才可以累積到人生的第一桶金 100 萬元？(四捨五入至整數位)

例 2.3：當 $n\to\infty$ 時，$(1+\dfrac{1}{n})^n\to e=2.718281828\cdots$是一個無理數，稱為尤拉數。試利用計算機估計 $(1+\dfrac{1}{12})^{12}$ 與 $(1+\dfrac{1}{365})^{365}$ 至小數點以下第四位

重點 3：指數與對數在科學上的應用

指對數在科技上的應用不可勝數，因為科學上有許多量大小差異相當之大，此時用指數或對數來處理會方便許多

例 3.1：右圖表示人、狗、貓、海豚、蝙蝠等動物所能聽到的聲音頻率範圍(單位：赫茲 Hz)。請問在這些動物中，有哪幾種可以聽到頻率範圍在 $10^{2.5}$ 到 $10^{4.5}$ 赫茲的所有聲音？



例 3.2：地震的芮氏規模 m 和地震放出的能量 r (單位：焦耳)的關係是 $\log r=1.5m+4.8$。試問西元 2011 年芮氏規模 8.9 的日本東北大地震，其釋放出來的能量是西元 2018 年花蓮芮氏規模 6.2 的地震放出能量的多少倍？(四捨五入至整數位)

例 3.3：晴朗無光害的夜空中。我們仰頭會看見許多星星，有些較亮有些較暗，事實上因為距離遠近的關係，星星真正的發光強度(絕對星等 M)與我們在地球上觀測到的亮度(視星等 m)並不相同，科學家在兩者間建立了以下公式：

$m = M + 5\log\dfrac{d}{32.616}$，其中 d 為所觀測恆星與地球的距離(單位：光年)。根據 SAO 星表可知織女星與地球的距離約為 25 光年，絕對星等為 0.58，若測得北極星絕對星等為－3.6052，而其視星等比織女星多 2。試求北極星與地球距離為多少光年？(四捨五入至整數光年)

例 3.4：西元 1947 年，死海西北方的一個少年為了追羊，朝山洞裡丟石頭，意外打破瓦罐而發現“死海古卷。”這在歷史學、考古學、宗教學上是極重要的發現。假如專家在 1950 年測量古卷上碳-14 的含量，發現是正常含量的 78 %。已知碳-14 的半衰期約為 5700 年。試問古卷應該是何時的古物？(四捨五入至整數年)