Ch 2.3 對數函數(logarithmic function)及其圖形

二年____班　座號：____　姓名：

重點 1：對數函數的圖形及其性質

1.定義：設 $a>0$，$a\neq 1$，則對於任意正實數 x，稱 $f(x)=y=\log_a x$ 是以 a 為底數，x 為真數的對數函數

註：對數函數 $y=f(x)=\log_a x$ 之定義域：x 為所有正實數，值域：y 為所有實數

2.對數函數 $f(x)=\log_a x$ 圖形及其性質：

(1)圖形恆在 y 軸的右方(真數 x 為正實數)，而 $f(x)>0$ 或 $f(x)=0$ 或 $f(x)<0$ 皆有可能

(2)圖形過點(1，0)

(3)以 y 軸為漸近線

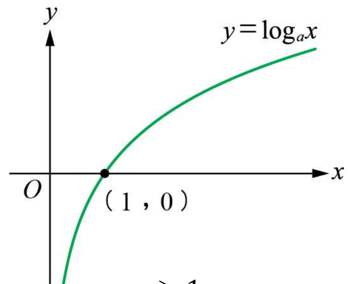
(4)當 $a>1$ 時，$y=\log_a x$ 為**嚴格遞增**函數，圖形由左往右逐漸上升。**凹口向下**的圖形

當 $0<a<1$ 時，$y=\log_a x$ 為**嚴格遞減**函數，圖形由左往右逐漸下降。**凹口向上**的圖形

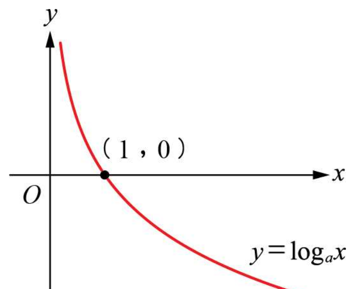
註：嚴格遞增函數：當 $\alpha<\beta$ 時，$\log_a \alpha<\log_a \beta$

嚴格遞減函數：當 $\alpha<\beta$ 時，$\log_a \alpha>\log_a \beta$

(5)圖形在 y 軸右方，與鉛直線 $x=h$ 恰交一點；圖形與水平線 $y=k$ 都恰交一點



$\underline{a>1}$

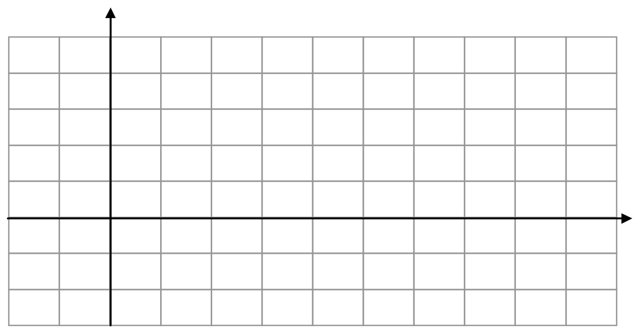


$\underline{0<a<1}$

例 1.1：利用描點法描繪函數 $y=\log_2 x$ 的圖形。

解：

x	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8
$y=\log_2 x$							



性質：

1.圖形恆在______的____方，而 $f(x)$_____0

2.圖形過點________，凹口向_____的圖形

3.以______為漸近線

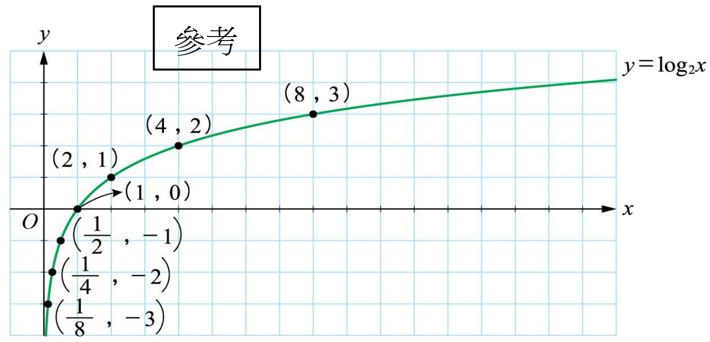
4.當 $a>1$ 時，$y=\log_a x$ 為嚴格遞_____函數，

圖形由____往____逐漸______

5.圖形在 y 軸_____方，與鉛直線_______恰交____點；

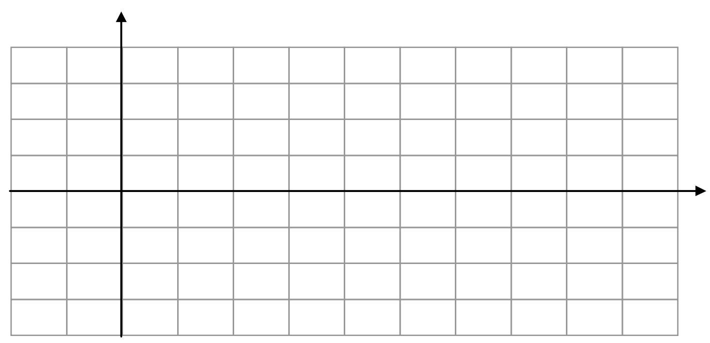
圖形與水平線______都恰交______點

參考



例 1.2：利用描點法描繪函數 $y=\log_{\frac{1}{2}} x$ 的圖形。

x	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8
$y=\log_{\frac{1}{2}} x$							



性質：

1.圖形恆在______的____方，而 $f(x)$_____0

2.圖形過點________，凹口向_____的圖形

3.以______為漸近線

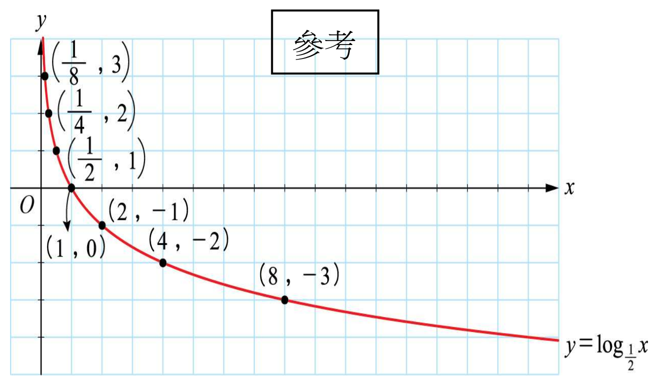
4.當 $a>1$ 時，$y=\log_a x$ 為嚴格遞_____函數，

圖形由____往____逐漸______

5.圖形在 y 軸_____方，與鉛直線_______恰交____點；

圖形與水平線______都恰交______點

參考

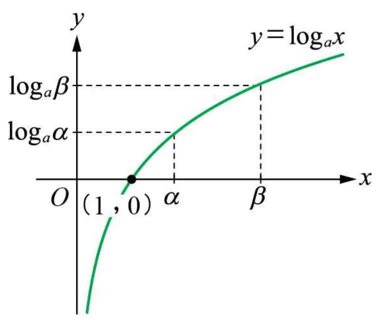


重點 2：對數函數的遞增、遞減性質與對稱性質

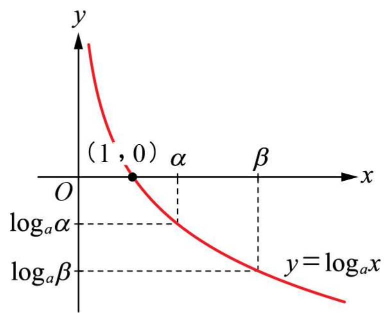
1.遞增、遞減：指數函數 $y=f(x)=\log_a x$ 的圖形可得：

(1)當 $a>1$ 時，函數 $y=\log_a x$ 的圖形由左而右逐漸上升，是嚴格遞增函數，即當 $\alpha<\beta$ 時，$\log_a \alpha<\log_a \beta$

(2)當 $0<a<1$ 時，函數 $y=\log_a x$ 的圖形由左而右逐漸下降，是嚴格遞減函數，即當 $\alpha<\beta$ 時，$\log_a \alpha>\log_a \beta$



嚴格遞增函數



嚴格遞減函數

2.對稱定義：點$(x，y)$為函數 $f(x)$上之點，點$(-x，y)$為函數 $g(x)$上之點，則函數 $f(x)$、$g(x)$的圖形對稱於 ***y* 軸**

點$(x，y)$為函數 $f(x)$上之點，點$(x，-y)$為函數 $g(x)$上之點，則函數 $f(x)$、$g(x)$的圖形對稱於 ***x* 軸**

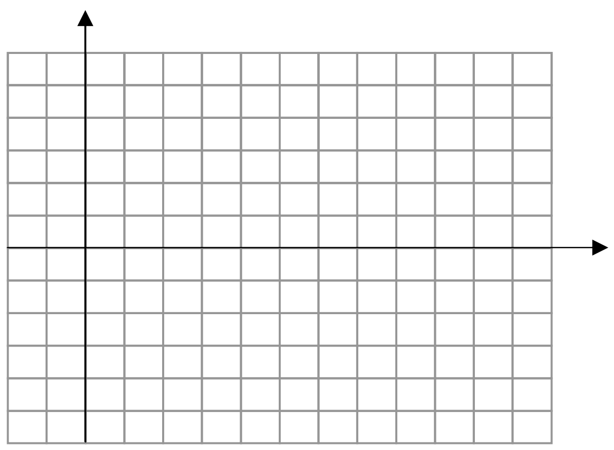
點$(x，y)$為函數 $f(x)$上之點，點$(-x，-y)$為函數 $g(x)$上之點，則函數 $f(x)$、$g(x)$的圖形對稱於**原點**

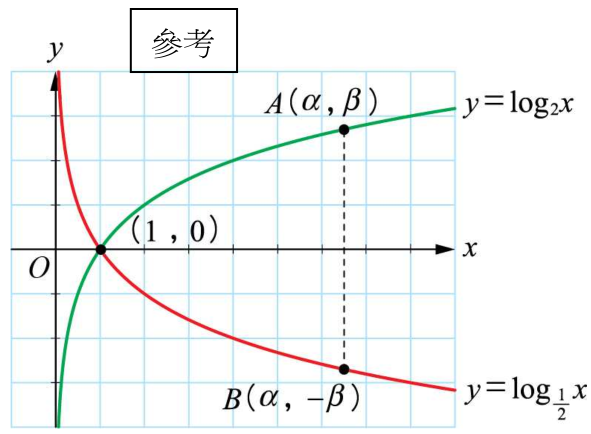
3.指數函數圖形的對稱性：

若點 A$(\alpha，\beta)$在 $y=\log_a x$ 的圖形上，而點 B$(\alpha，-\beta)$在 $y=\log_{\frac{1}{a}} x$ 的圖形上，則稱 A，B 兩點對稱於 x 軸

即 $y=\log_2 x$ 的圖形與 $y=\log_{\frac{1}{2}} x$ 的圖形對稱於 x 軸

例 2.1：試在同一坐標平面上，作 $y=\log_2 x$ 與 $y=\log_{\frac{1}{2}} x$ 兩圖形，並說明兩圖形對稱於 x 軸。





說明兩圖形對稱於 x 軸

重點 3：對數函數的凹向性質

對數函數圖形 $y=\log_a x$ 的凹向性如下：

1.當 $a>1$ 時，$y=\log_a x$ (嚴格遞增函數)為凹向下，如圖 1

2.當 $0<a<1$ 時，$y=\log_a x$ (嚴格遞減函數)為凹向上，如圖 2

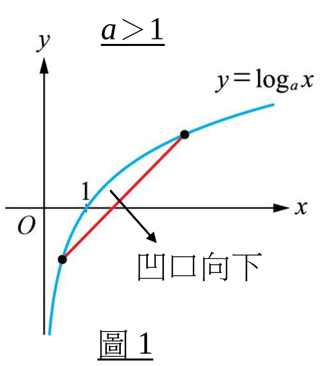


圖 1

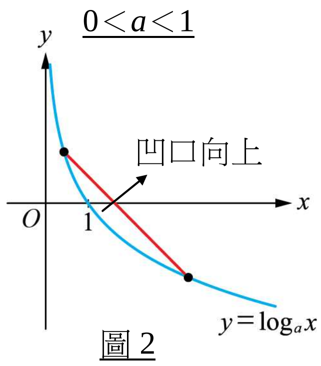
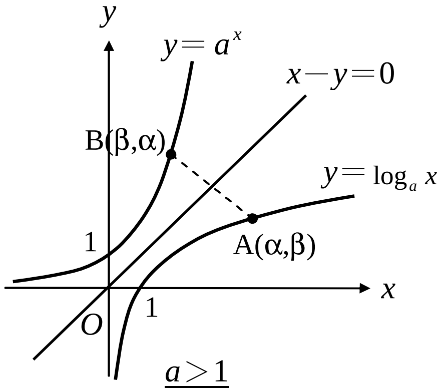


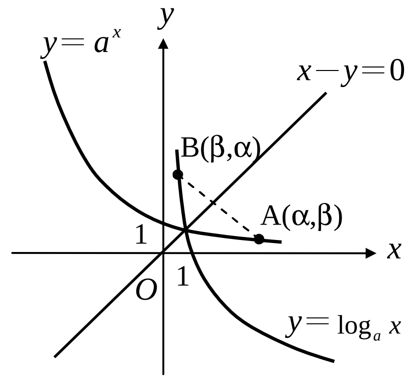
圖 2

重點 4：指數與對數函數的對稱性質

意義：若 $a>0$，$a\neq1$，指數函數 $y=a^x$ 與對數函數 $y=\log_a x$ 的圖形對稱於直線 $x-y=0$，如下圖：

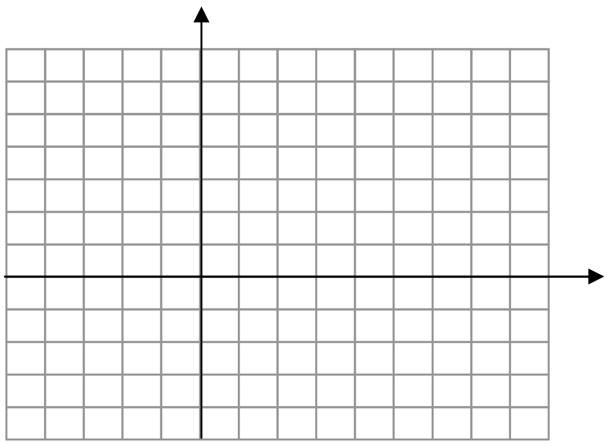


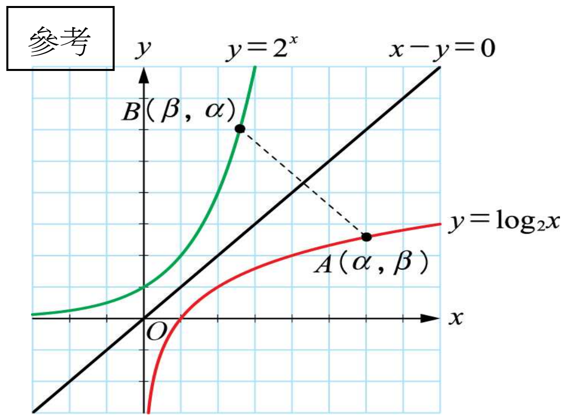
$a>1$



$0<a<1$

例 4.1：試在同一坐標上，作指數函數 $y=2^x$ 與對數函數 $y=\log_2 x$ 的圖形，並說明兩者對稱於直線 $x-y=0$





說明兩者對稱於直線 $x-y=0$

重點 5：對數方程式

1.意義：方程式的未知數出現在對數之真數位置時，稱為對數方程式。

2.解對數方程式步驟：

步驟 1：對數函數有意義的先決**條件**為：底數大於 0 且不等於 1，真數大於 0

步驟 2：利用對數運算性質，解方程式，得出其解，並驗算符合條件之解

註：對數函數 $f(x)=\log_a x>0$、$f(x)=\log_a x=0$ 與 $f(x)=\log_a x<0$ 解可能成立

3.有時解指數方程式時需要用到「**兩邊取對數**」的方法

4.實數根個數：給定方程式 $f(x)=g(x)$，則方程式**實根的個數**就是 $y=f(x)$與 $y=g(x)$的圖形**交點個數**

例 5.1：試解下列各方程式：

(1) $\frac{1}{2}\log(x-1)=\log 6$　　(2) $\log(x-1)+\log(2x+1)=1+\log 2$

例 5.2：解指數方程式 $2^{2x+3}=12^{x}$ (利用兩邊取對數)

重點 6：對數不等式

1.意義：對數式中，底數或真數含有未知數的不等式，稱之為對數不等式。

註：對數不等式 $f(x)=\log_a x\neq 0$，包含 $f(x)>0$，$f(x)\geq 0$，$f(x)<0$，$f(x)\leq 0$ 四種形式

2.解對數不等式步驟：

步驟 1：對數函數有意義的先決條件為：底數大於 0 且不等於 1，真數大於 0

步驟 2：利用對數運算之遞增、遞減性質，解不等式，得出其解，並驗算符合條件之解

註：對數函數 $f(x)=\log_a x>0$、$f(x)=\log_a x=0$ 與 $f(x)=\log_a x<0$ 解可能成立

例 6.1：試解下列不等式：

(1) $\log_{\frac{1}{2}} x>3$ (2) $2\log(x-2)<\log(8-x)$

例 6.2：設一隻蝸牛第一天走 1 公尺，第二天走 $\frac{1}{2}$ 公尺，第三天走 $\frac{1}{3}$ 公尺，…，依此類推，科學家知道一個計算前 n 個自然倒數和的近似公式：$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}\approx\frac{\log n}{0.4343}+0.5772$，試利用此公式與計算機計算下列各題；

(1)這隻蝸牛走了 100 天的總距離為多少公尺？(四捨五入至小數點後第二位)

(2)這隻蝸牛走了 1000 天的總距離為多少公尺？(四捨五入至小數點後第二位)

(3)試問隻蝸牛走了 10^{40} 天的總距離會不會超過 100 公尺？