Ch 1-3 三角函數的圖形　　二年____班　座號：____　姓名：

重點 1：正弦函數的圖形

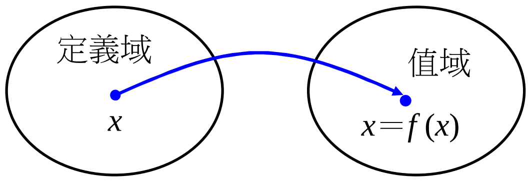
意義：描繪函數圖形最直接的方法就是描點

1.正弦函數 $y=\sin x$ 的圖形

對某些特殊的 x 值(弳)求出其對應的函數值 $y=\sin x$，列表，將點$(x，y)$逐一標示於坐標平面上。如果描點數夠多，並用平滑曲線將這些點連起來，就可得到 $y=\sin x$ 在 $0\le x\le 2\pi$ 上的圖形 (如例 1.1)

2. $y=\sin x$ 的圖形增減性：

x	$0\sim\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2}\sim\pi$	$\pi\sim\frac{3\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{2}\sim 2\pi$
y	0 遞增 1	1 遞減 0	0 遞減 -1	-1 遞增 0



3.正弦函數 $y=\sin x$ 的性質：

(1)定義域：對於一個函數 $f(x)$而言，能讓 $f(x)$有意義的所有 x 所成的集合，稱為此函數的**定義域**

對任意實數 x，$\sin x$ 都有意義，所以其定義域為全體實數 R，即$\{x\mid x\in R\}=(-\infty，\infty)$

(2)值域：所有 x 所對應的 $f(x)$可能的函數值所成的集合，稱為此函數的**值域**

定義域的對應值 y，稱為函數的值域，$\sin x$ 的值涵蓋在-1 與 1 之間的實數，所以其值域為$\{y\in R\mid -1\le y\le 1\}$

(3)週期 T：$y=\sin x$ 為週期函數，週期 T 為 $2\pi\,\{y\in R\mid -1\le y\le 1\}$

由於 $T=2\pi$ 滿足恆等式 $\sin(x+T)=\sin x$ 的最小正數，得知 $T=2\pi$ 為週期函數 $y=\sin x$ 的週期

註：頻率 f 為週期 T 的倒數，即 $f=\frac{1}{T}$

(4)振幅：$y=\sin x$ 的振幅為 1

函數圖形在 x 軸上方或下方擺動的最大距離稱為振幅，$y=\sin x$ 圖形在 $y=1$ 與-1 之間擺動，故振幅為 1

(5)對稱性：(i) $\sin(-x)=-\sin x$，即 $f(-x)=-f(x)$，稱 $y=\sin x$ 的圖形對稱於**原點**

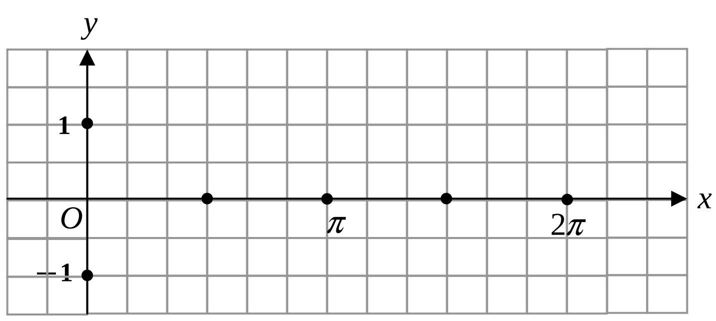
(ii)對稱於所有通過波峰或波谷的鉛直線：方程式為 $x=\frac{\pi}{2}$，$x=\frac{3\pi}{2}$，…等，即 $x=\frac{\pi}{2}+k\pi$，k 為整數

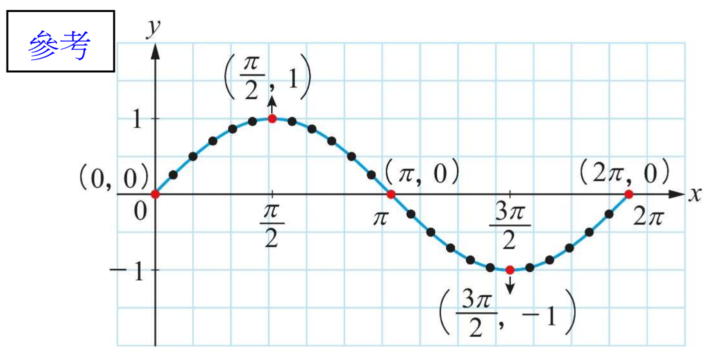
例 1.1：在坐標平面上描繪 $y=\sin x$ 在 $0\le x\le 2\pi$ 上的圖形

解：對某些特殊的 x 值(弳)求出其對應的函數值 $y=\sin x$，列表如下

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{7\pi}{4}$	2π
y													

將點$(x，y)$逐一標示於坐標平面上。並用平滑曲線將這些點連起來，就可得到 $y=\sin x$ 在 $0\le x\le 2\pi$ 上的圖形





$y=\sin x$ 的性質

(1)定義域為：

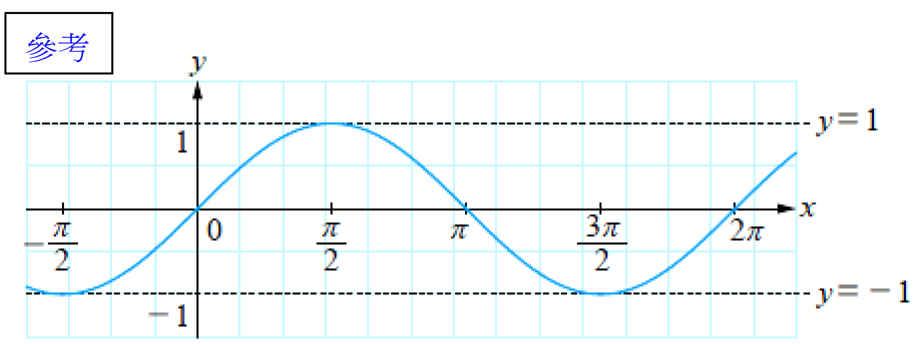
(2)值域為：

(3)週期為：

(4)振幅為：

(5)圖形對稱於____

圖形對稱於直線：



重點 2：餘弦函數的圖形

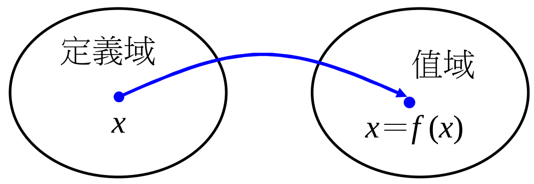
意義：描繪函數圖形最直接的方法就是描點

1.餘弦函數 $y=\cos x$ 的圖形

對某些特殊的 x 值(弳)求出其對應的函數值 $y=\cos x$，列表，將點(x，y)逐一標示於坐標平面上。如果描點數夠多，並用平滑曲線將這些點連起來，就可得到 $y=\cos x$ 在 $0\le x\le 2\pi$ 上的圖形 (如例 2.1)

2. $y=\sin x$ 的圖形增減性：

x	$0\sim\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2}\sim\pi$	$\pi\sim\frac{3\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{2}\sim 2\pi$
y	1 遞減 0	0 遞減 -1	-1 遞增 0	0 遞增 1



3.餘弦函數 $y=\cos x$ 的性質：

(1)定義域：對於一個函數 $f(x)$而言，能讓 $f(x)$有意義的所有 x 所成的集合，稱為此函數的**定義域**

對任意實數 x，$\cos x$ 都有意義，所以其定義域為全體實數 R，即$\{x\mid x\in R\}=(-\infty,\infty)$

(2)值域：所有 x 所對應的 $f(x)$可能的函數值所成的集合，稱為此函數的**值域**

定義域的對應值 y，稱為函數的值域，$\cos x$ 的值涵蓋在 -1 與 1 之間的實數，所以其值域為$\{y\in R\mid -1\le y\le 1\}$

(3)週期 T：$y=\cos x$ 為週期函數，週期 T 為 2π $\{y\in R\mid -1\le y\le 1\}$

由於 $T=2\pi$ 滿足恆等式 $\cos(x+T)=\cos x$ 的最小正數，得知 $T=2\pi$ 為週期函數 $y=\cos x$ 的週期

註：頻率 f 為週期 T 的倒數，即 $f=\frac{1}{T}$

(4)振幅：$y=\cos x$ 的振幅為 1

函數圖形在 x 軸上方或下方擺動的最大距離稱為振幅，$y=\cos x$ 圖形在 $y=1$ 與 -1 之間擺動，故振幅為 1

(5)對稱性：(i) $\cos(-x)=\cos x$，即 $f(-x)=f(x)$，稱 $y=\cos x$ 的圖形對稱於 **y 軸**

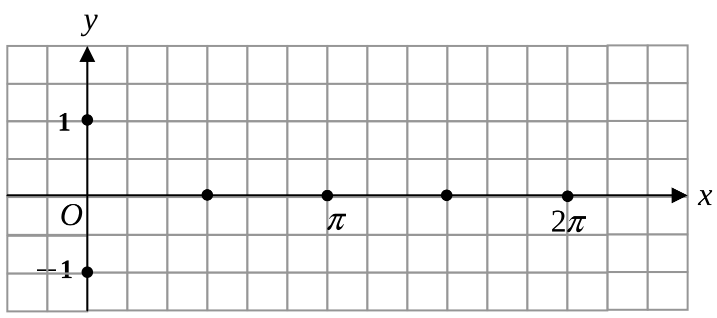
(ii)對稱於所有通過波峰或波谷的鉛直線：方程式為 $x=\pi$，$x=2\pi$，…等，即 $x=k\pi$，k 為整數

例 2.1：在坐標平面上描繪 $y=\cos x$ 在 $0\le x\le 2\pi$ 上的圖形

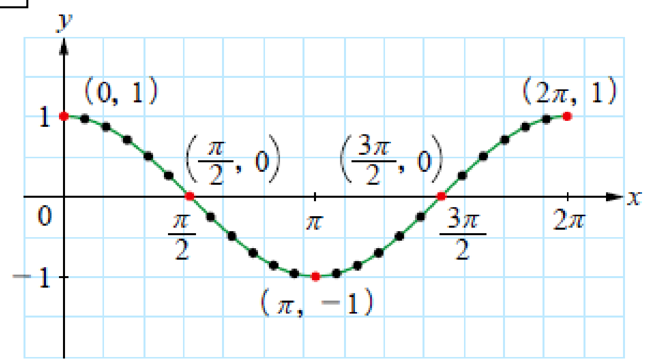
解：對某些特殊的 x 值(弳)求出其對應的函數值 $y=\cos x$，列表如下

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{7\pi}{4}$	2π
y													

將點(x，y)逐一標示於坐標平面上。並用平滑曲線將這些點連起來，就可得到 $y=\cos x$ 在 $0\le x\le 2\pi$ 上的圖形



參考



$y=\cos x$ 的性質

(1)定義域為：

(2)值域為：

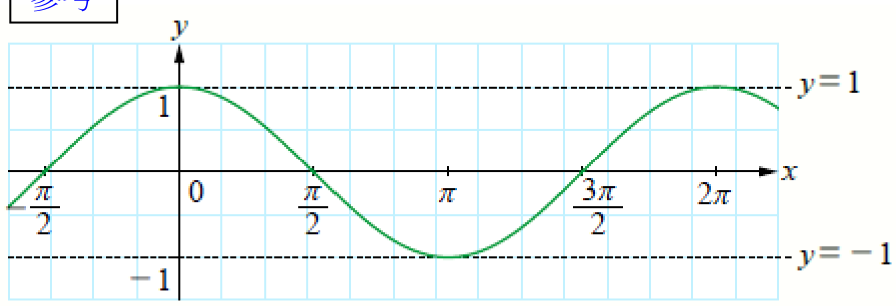
(3)週期為：

(4)振幅為：

(5)圖形對稱於＿＿＿

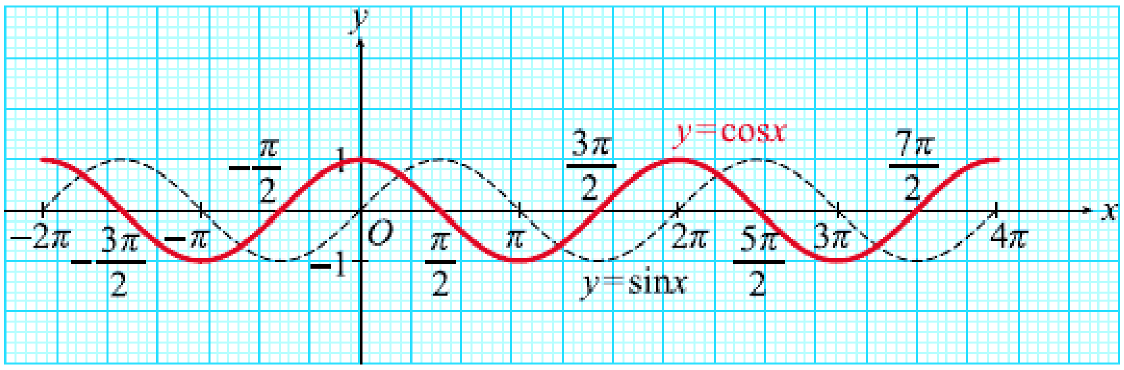
圖形對稱於直線：

參考



重點 3：正、餘弦函數圖形的比較

因 $y=\cos x=\sin(\frac{\pi}{2}-x)$，餘弦函數 $y=\cos x$ 的圖形可以由正弦函數 $y=\sin x$ 的圖形**向左平移** $\frac{\pi}{2}$ 單位得到



註：由圖形得知，函數 $y=\cos x$ 的圖形可以由正弦函數 $y=\sin x$ 的圖形**向右平移** $\frac{3\pi}{2}$ 單位得到

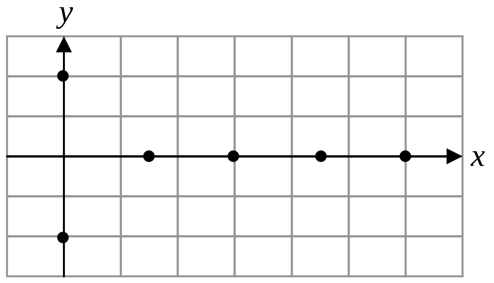
例 3.1：將正弦函數 $y=\sin x$ 與餘弦函數 $y=\cos x$ 的圖形畫在同一坐標平面上，利用圖形回答下列各題：

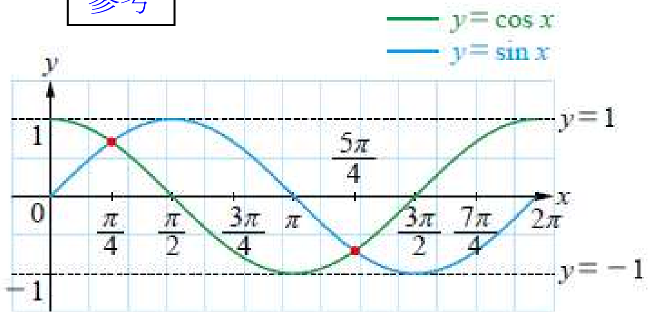
(1)在 $0\le x\le 2\pi$ 時，$y=\sin x$ 與 $y=\cos x$ 的圖形有幾個交點？

(2)在 $0\le x\le 2\pi$ 時，解 $\sin x=\cos x$

參考

解：(1)





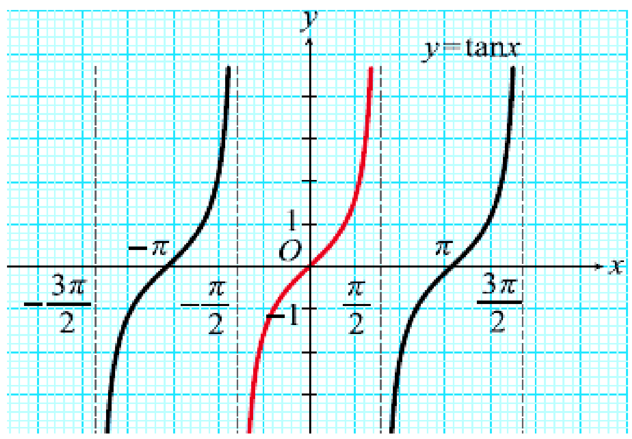
(2)

重點 4：正切函數的圖形

1.正切函數 $y=\tan x$ 的圖形

由換算公式 $\tan(x+\pi)=\tan x$，又因為 $\tan x$ 在 $x=\frac{\pi}{2}$，$x=-\frac{\pi}{2}$ 時沒有定義

所以作圖時只需先畫出 $-\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}$ 範圍內的圖形作討論 (例 4.1)



2.(1) $y=\tan x$ 的圖形特性：

x	$-\frac{\pi}{2}\sim 0$	$0\sim\frac{\pi}{2}$
y	$-\infty$ 遞增 0	0 遞增 ∞

(2)定義域：$\{x\in R\mid x\ne k\pi+\frac{\pi}{2}$，$k$ 為整數 $\}$

x 取值的範圍稱作定義域，$\tan x=\frac{\sin x}{\cos x}$ 中分母 $\cos x\ne 0$，所以其定義域為 $\{x\in R\mid x\ne k\pi+\frac{\pi}{2}$，$k\in Z\}$

(3)值域：$\{y\in R\}=(-\infty,\infty)$，即**沒有最大值，也沒有最小值**

定義域的對應值 y，稱為函數的值域，$\tan x$ 的值涵蓋每一個實數，所以其值域為 $y\in R$

(4)週期 T：$y=\tan x$ 為週期函數，週期 T 為 π

由於 $y=\tan x$ 在 $-\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}$ 與 $\frac{\pi}{2}<x<\frac{3\pi}{2}$ 的圖形完全相同，即 $\tan(x+\pi)=\tan x$，得知週期為 π

註：頻率 f 為週期 T 的倒數，即 $f=\frac{1}{T}$

(5)對稱性：(i) $\tan(-x)=-\tan x$，即 $f(-x)=-f(x)$，稱 $y=\tan x$ 的圖形對稱於**原點**

(ii)漸近線為鉛直線：方程式為 $x=-\frac{\pi}{2}$，$x=\frac{\pi}{2}$，…等，即 $x=\frac{k\pi}{2}$，k 為整數

例 4.1：在 $-\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}$，作 $y=\tan x$ 的圖形

解：

x	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{6}$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
y									

$y=\tan x$ 的性質

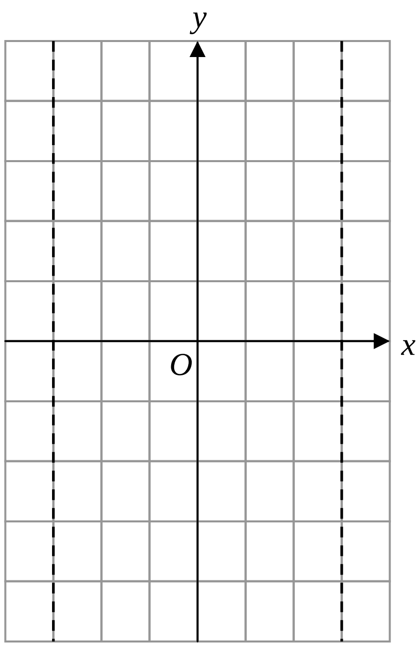
(1)定義域為：

(2)值域為：

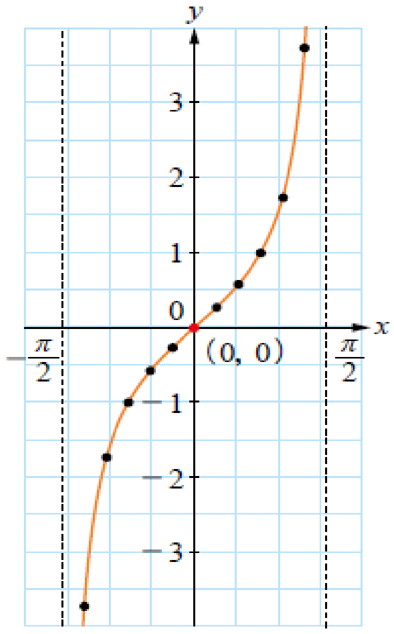
(3)週期為：

(4)圖形對稱於

(5)漸近線方程式為



參考



重點 5：三函數圖形的平移、伸縮與對稱

1.圖形的平移：設 h，$k>0$，則：

(1)函數 $y=f(x)+k$ 的圖形是將 $y=f(x)$的圖形向上平移 k 單位

(2)函數 $y=f(x)-k$ 的圖形是將 $y=f(x)$的圖形向下平移 k 單位

(3)函數 $y=f(x+k)$的圖形是將 $y=f(x)$的圖形向左平移 k 單位

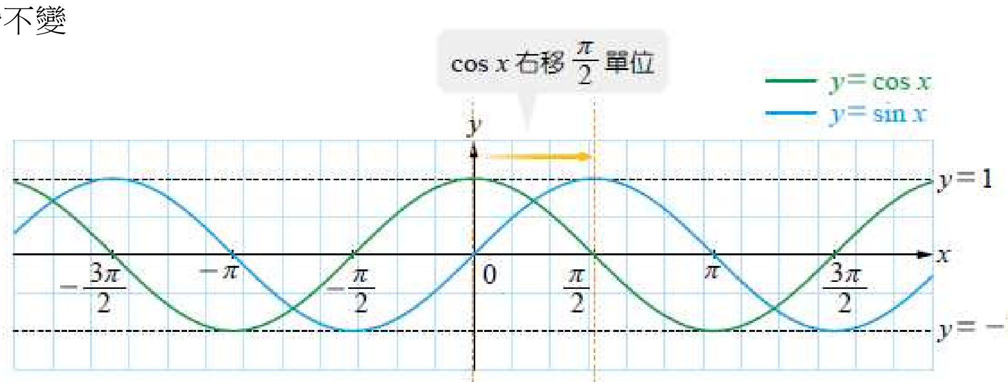
(4)函數 $y=f(x-k)$的圖形是將 $y=f(x)$的圖形向右平移 k 單位

註：圖形的平移，其定義域、值域與週期皆不變

例如：如右圖

$\cos(x-\frac{\pi}{2})=\cos(\frac{\pi}{2}-x)=\sin x$

$y=\cos x$ 向右 $\frac{\pi}{2}$ 與 $y=\sin x$ 重合



2.圖形的伸縮：設 $a>0$，則：

(1) $y=a\,f(x)$的圖形是將 $y=f(x)$的圖形上每一點的 y 坐標都乘上 a 倍

(2) $y=f(ax)$的圖形是將 $y=f(x)$的圖形上每一點的 x 坐標都乘上$\dfrac{1}{a}$倍

註：圖形的伸縮，其定義域不變、但值域與週期視上下或左右伸縮而定

3.圖形的對稱：

(1) $y=-\sin x$ 的圖形可由 $y=\sin x$ 的圖形對 x 軸對稱得到

(2) $y=-\cos x$ 的圖形可由 $y=\cos x$ 的圖形對 x 軸對稱得到

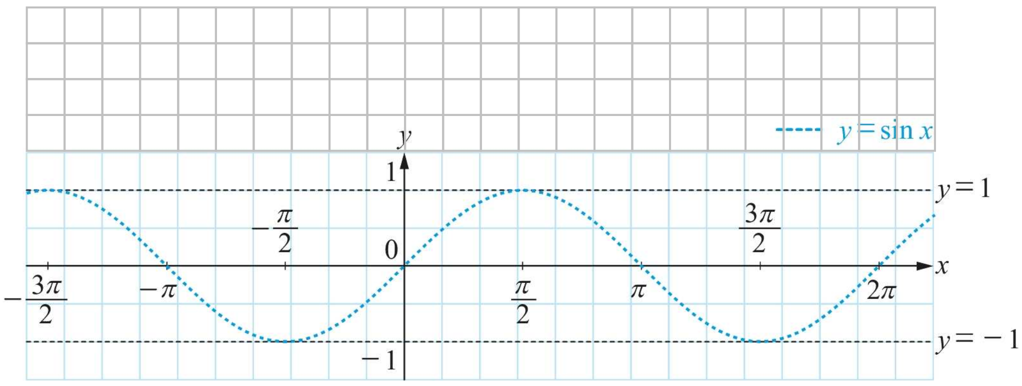
註：當 $a<0$ 時，$y=a\cos x$ 的圖形是先將 $y=\cos x$ 的圖形對 x 軸作對稱，再將 y 坐標伸縮$|a|$倍而得到

例如：$y=-2\cos x$，先將 $y=\cos x$ 對 x 軸作對稱，再將 y 坐標伸縮$|-2|$倍

◎圖形的平移

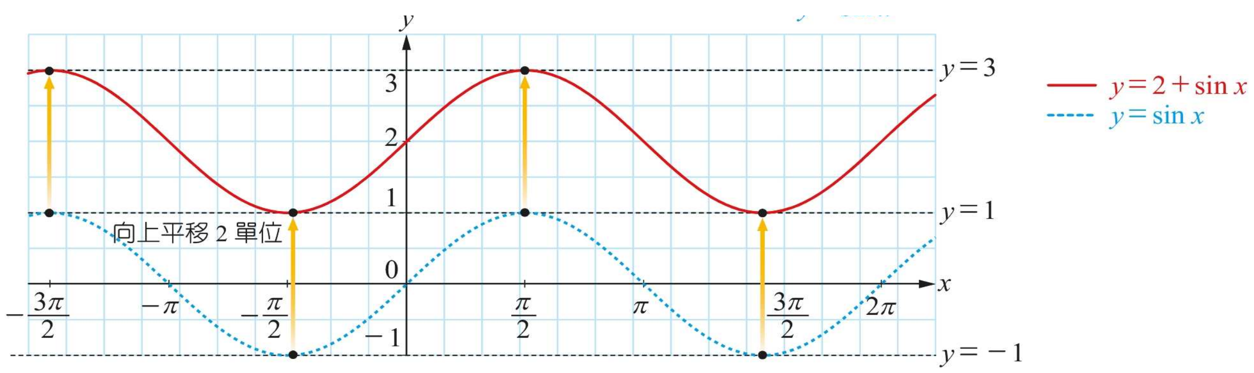
例 5.1：試利用 $y=\sin x$ 的圖形，畫出下列各圖形：

(1) $y=2+\sin x$

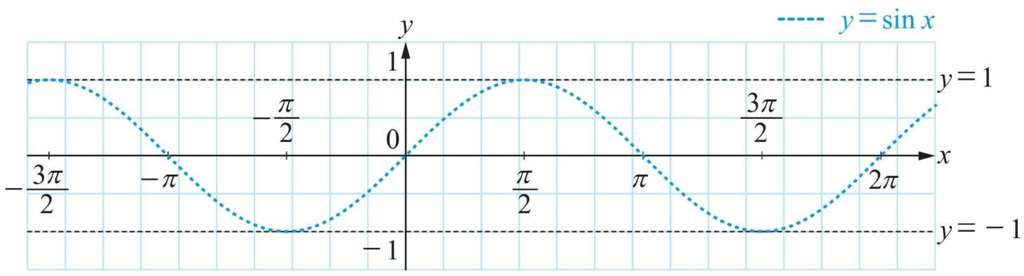


則：定義域為__________，值域為____________，週期為______，最大值＝______，最小值＝______

參考

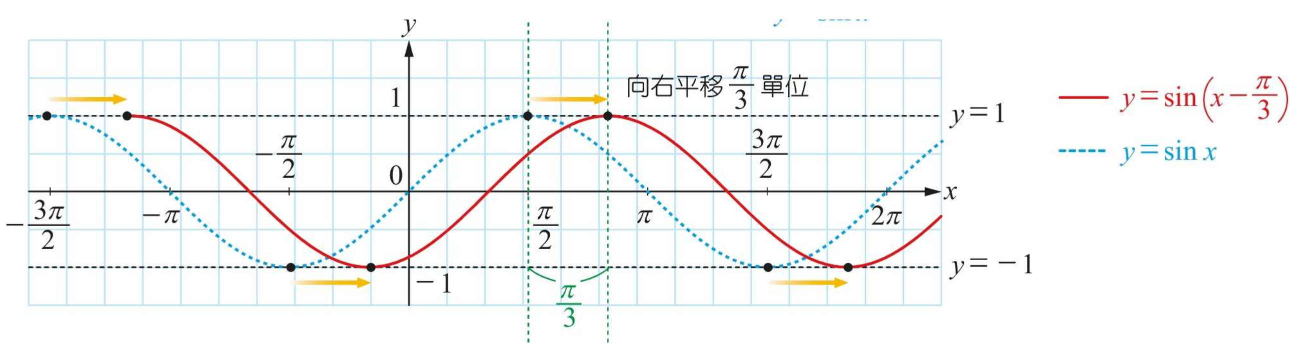


(2) $y=\sin(x-\dfrac{\pi}{3})$



則：定義域為__________，值域為____________，週期為______，最大值＝______，最小值＝______

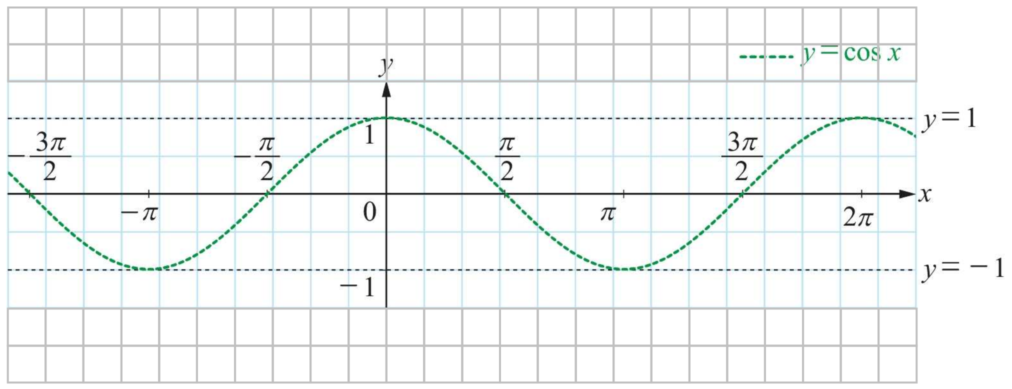
參考



◎圖形的伸縮

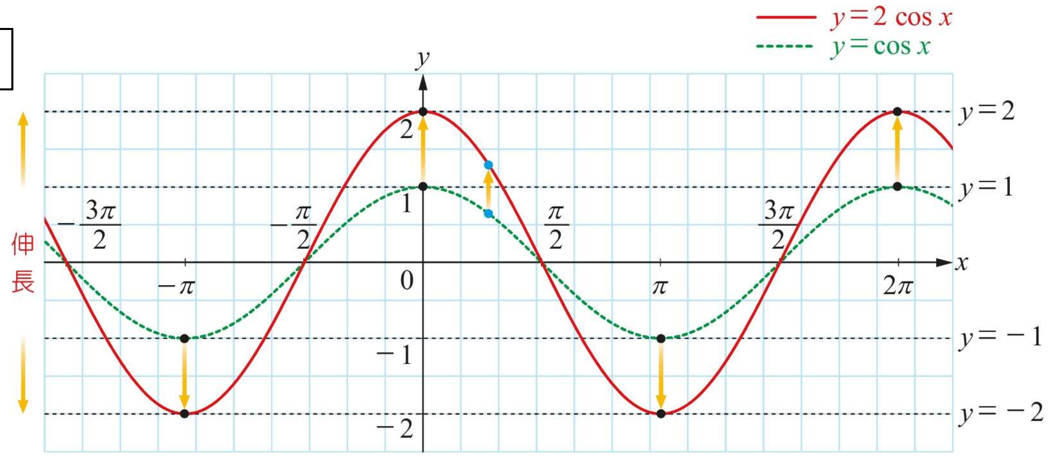
例 5.2：試利用 $y=\cos x$ 的圖形，畫出下列圖形：

(1) $y=2\cos x$

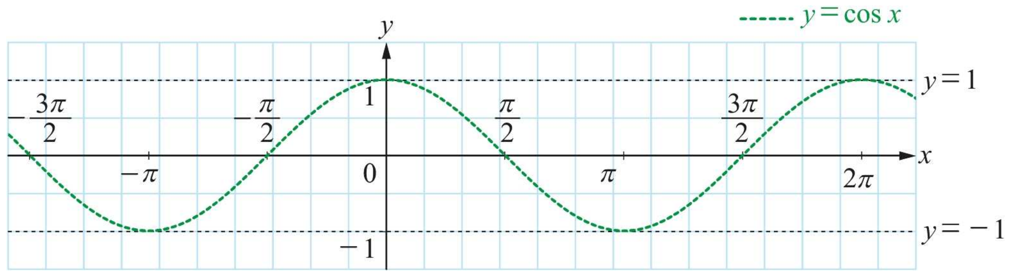


則：定義域為__________，值域為___________，週期為______，最大值＝______，最小值＝______

參考

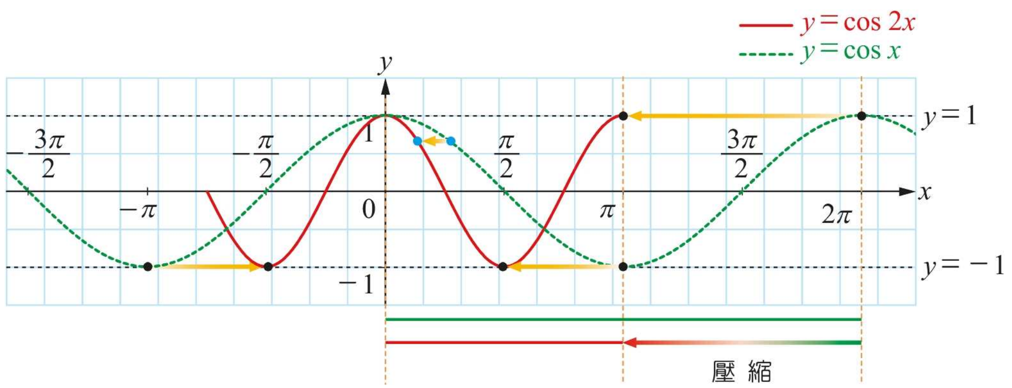


(2) $y=\cos 2x$



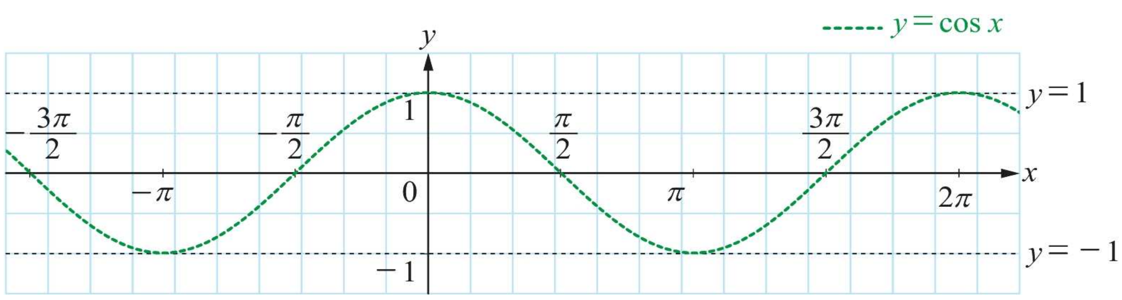
則：定義域為__________，值域為___________，週期為______，最大值＝______，最小值＝______

參考



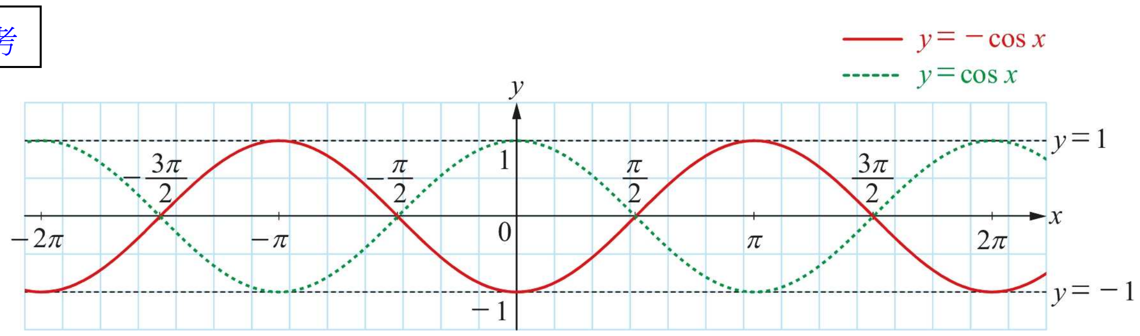
◎圖形的對稱

例 5.3：由 $y=\cos x$ 的圖形對 x 軸對稱，作 $y=-\cos x$ 的圖形



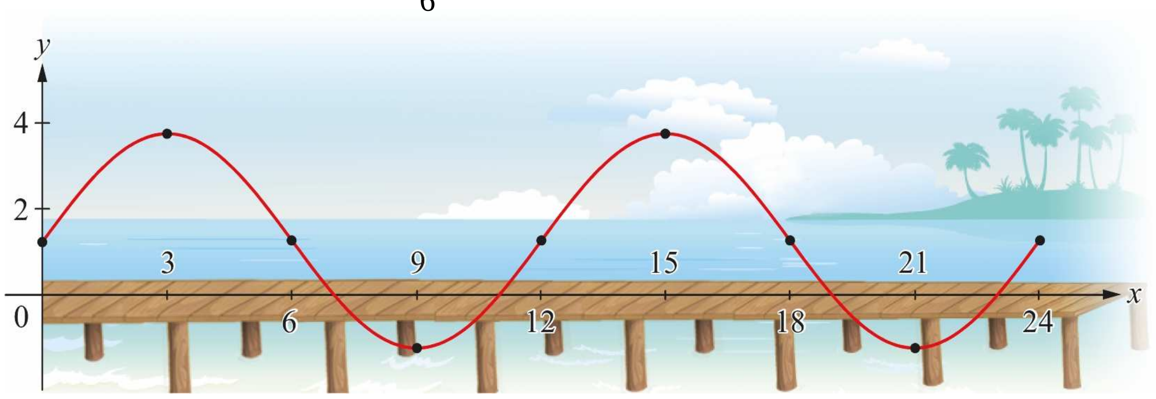
則：定義域為__________，值域為___________，週期為______，最大值＝______，最小值＝______

參考



◎自然界的週期現象

例 5.4：如圖，某風景區有一著名的海上步道，以步道為基準，海水水位高度高於步道為正，低於步道為負。假設某日時刻(x)與海水高度(y)的預測可用函數 $y=2.5\sin(\frac{\pi}{6}x)+1.25$ 來描述，其中 $0\le x\le 24$，即可得時間與高度的圖形



(1)以 3 小時為一單位，試完成下表：

時間(x)	0：00	3：00	6：00	9：00	12：00	15：00	18：00	21：00	24：00
高度(y)									

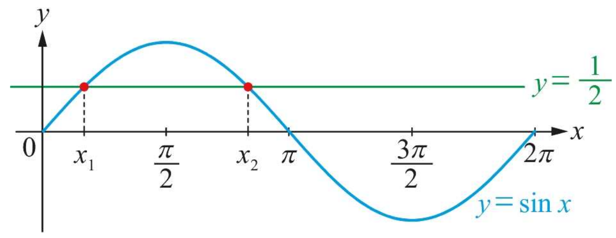
(2)今為考慮安全問題，當地規定僅可在 18：00 前且高度非正時，海上步道才開放，請問一日當中何時可以開放？

重點 6：解三角方程式、三角不等式

利用三角函數的圖形來解三角方程式、三角不等式問題

◎解三角方程式

例 6.1：在 $0 \le x \le 2\pi$ 範圍內，試求方程式 $\sin x = \frac{1}{2}$ 的解



◎解三角不等式

例 6.2：在 $0 \le x \le 2\pi$ 範圍內，試求不等式 $\sin x > \frac{\sqrt{3}}{2}$ 的解