Ch 1-1 常用的三角比公式　　二年____班　座號：____　姓名：

重點 1：正弦、餘弦的和角公式與差角公式

1.正弦公式：對於任意角α和β

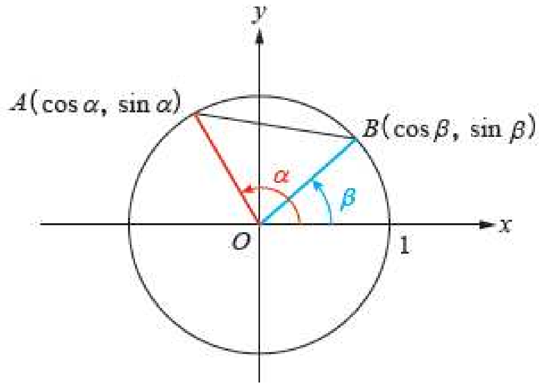
(1)正弦的和角 $\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$

(2)正弦的差角 $\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$

2.餘弦公式：對於任意角α和β

(3)餘弦的和角 $\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$

(4)餘弦的差角 $\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$



說明：如右圖，則距離＝$\overline{AB}^2$＝餘弦定理，得知 $\cos(\alpha-\beta)$公式

3.應用公式：對於任意角α和β

(1) $\sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta)=\sin^2\alpha+\cos^2\beta-1=\sin^2\alpha-\sin^2\beta=\cos^2\beta-\cos^2\alpha$

(2) $\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)=\cos^2\alpha+\cos^2\beta-1=\cos^2\alpha-\sin^2\beta=\cos^2\beta-\sin^2\alpha$

說明：如右圖，根據正弦定理$\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}=2R$

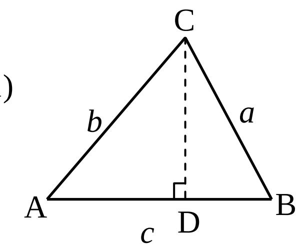
∵由投影定理知 $c=b\cos A+a\cos B$

∴$2R\sin C=(2R\sin B)\cos A+(2R\sin A)\cos B$，$\Rightarrow \sin C=\sin B\cos A+\sin A\cos B$ ……(1)

又 ∵ΔABC 中，$A+B+C=\pi$，$\Rightarrow$∴$C=\pi-(A+B)$

$\Rightarrow \sin C=\sin[\pi-(A+B)]=\sin(A+B)$……(2)

由(1)，(2)得 $\sin(A+B)=\sin B\cos A+\sin A\cos B=\sin A\cos B+\cos A\sin B$



◎$\cos(\alpha-\beta)$公式

例 1.1：試求下列各值：

(1) $\cos77°\cos17°+\sin77°\sin17°$　　(2) $\cos15°$

◎$\cos(\alpha+\beta)$公式

例 1.2：試求下列各值：

(1) $\cos13°\cos47°-\sin13°\sin47°$　　(2) $\cos75°$

◎$\sin(\alpha+\beta)$公式

例 1.3：試求下列各值：

(1) $\sin40°\cos95°+\cos40°\sin95°$　　(2) $\sin67°\cos83°+\sin23°\cos7°$

◎$\sin(\alpha-\beta)$公式

例 1.4：試求下列各值：

(1) $\sin200°\cos80°-\cos200°\sin80°$　　(2) $\sin15°$

例 1.5：已知 $0°<\alpha<90°$，$0°<\beta<90°$，且 $\sin\alpha=\dfrac{13}{14}$，$\cos\beta=\dfrac{5\sqrt{3}}{14}$，試求：

(1) $\sin(\alpha+\beta)$與 $\cos(\alpha+\beta)$的值　　(2) $\alpha+\beta$ 的度數

重點 2：正切的和角公式與差角公式

1.設對於任意角 α 和 β，$\tan\alpha$ 、 $\tan\beta$ 、 $\tan(\alpha\pm\beta)$ 皆有意義時，利用正弦、餘弦的和角公式與差角公式，則：

(1)正切的和角公式　$\tan(\alpha+\beta)=\dfrac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)}=\dfrac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$

(2)正切的差角公式　$\tan(\alpha-\beta)=\dfrac{\sin(\alpha-\beta)}{\cos(\alpha-\beta)}=\dfrac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}$

2.設直線 L：$ax+by+c=0$，$b\neq0$ 且其斜角為 θ(直線 L 不為鉛直線)，則：

(1)直線 L 的斜率 $m=-\dfrac{a}{b}$

(2)斜率 $m=\tan\theta$

例 2.1：試求下列各式之值：

(1) $\dfrac{\tan70^0+\tan50^0}{1-\tan70^0\tan50^0}=$______　　(2) $\dfrac{\tan76^0-\tan31^0}{1+\tan76^0\tan31^0}=$______

例 2.2：試求兩直線 L_1：$3x-y=0$ 與 L_2：$2x-y+2=0$ 的夾角　(四捨五入至小數點後第二位)

例 2.3：設 $0°<\alpha<90°$，$90°<\beta<180°$，且 $\tan\alpha=\dfrac{1}{3}$，$\tan\beta=-2$，試求：

(1) $\tan(\alpha+\beta)=$______　　(2) $\alpha+\beta$ 的度數＝_____

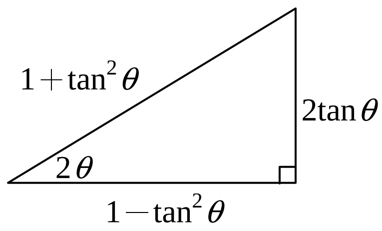
重點 3：二倍角公式

意義：在正弦、餘弦及正切的和角公式中，若 α，β 兩角度相同，即令 $\beta=\alpha=\theta$，則：

(1) $\sin(\alpha+\beta)=\sin2\theta=2\sin\theta\cos\theta=\dfrac{2\tan\theta}{1+\tan^2\theta}$

(2) $\cos(\alpha+\beta)=\cos2\theta=\cos^2\theta-\sin^2\theta=1-2\sin^2\theta=2\cos^2\theta-1=\dfrac{1-\tan^2\theta}{1+\tan^2\theta}$

(3) $\tan(\alpha+\beta)=\tan2\theta=\dfrac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}$，$\tan^2\theta\neq1$，$\tan\theta$，$\tan2\theta$ 皆有意義



說明：$\sin2\theta=\sin(\theta+\theta)=\sin\theta\cos\theta+\cos\theta\sin\theta=2\sin\theta\cos\theta$

$\cos2\theta=\cos(\theta+\theta)=\cos\theta\cos\theta-\sin\theta\sin\theta=\cos^2\theta-\sin^2\theta$

$\tan2\theta=\tan(\theta+\theta)=\dfrac{\tan\theta+\tan\theta}{1-\tan\theta\tan\theta}=\dfrac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}$

例 3.1：設 $90°<\theta<180°$ 且 $\sin\theta=\dfrac{4}{5}$，試求：

(1) $\sin2\theta=$______ (2) $\cos2\theta=$______ (3) $\tan2\theta=$______

例 3.2：已知 $\sin\theta-\cos\theta=\dfrac{1}{5}$，求 $\sin2\theta$ 的值

重點 4：半角公式

緣由：由二倍角公式 $\cos2\alpha=1-2\sin^2\alpha=2\cos^2\alpha-1$，得

1. $\sin^2\alpha=\dfrac{1-\cos2\alpha}{2}$，$\Rightarrow$ $\sin\dfrac{\theta}{2}=\pm\sqrt{\dfrac{1-\cos\theta}{2}}$ (**等號右邊取正或取負**，由 $\sin\dfrac{\theta}{2}$ 為正或負來決定)

2. $\cos^2\alpha=\dfrac{1+\cos2\alpha}{2}$，$\Rightarrow$ $\cos\dfrac{\theta}{2}=\pm\sqrt{\dfrac{1+\cos\theta}{2}}$ (**等號右邊取正或取負**，由 $\cos\dfrac{\theta}{2}$ 為正或負來決定)

3. $\tan^2\alpha=\dfrac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}=\dfrac{1-\cos2\alpha}{1+\cos2\alpha}$，$\Rightarrow$ $\tan\dfrac{\theta}{2}=\pm\sqrt{\dfrac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}}$，$\cos\theta\neq-1$ (**等號右邊取正或取負**，由 $\tan\dfrac{\theta}{2}$ 為正或負來決定)

例 4.1：試求 $\sin22.5°=$______，$\cos22.5°=$______及 $\tan22.5°=$______

例 4.2：設 $270°<\theta<360°$，且 $\sin\theta=-\dfrac{3}{5}$，試求：

(1) $\sin\dfrac{\theta}{2}=$______　　(2) $\cos\dfrac{\theta}{2}=$______　　(3) $\tan\dfrac{\theta}{2}=$______

例 4.3：如圖，將矩形紙張 $ABCD$ 的右下角沿 $\overline{EF}$ 摺起，恰使得 A 點落在 $\overline{BC}$ 邊的 G 點上，已知 $\overline{AF}=5$，$\overline{BF}=4$，則：

(1)設$\angle AEF=\theta$，試說明$\angle BFG=2\theta$

(2)試求 $\cos 2\theta$

(3)試求 $\overline{AE}$ 長