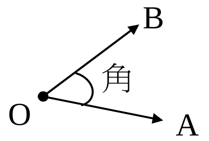
單元 11 廣義角三角比與極坐標 一年____班 座號：___ 姓名：

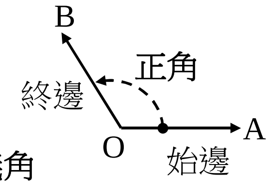
重點 1：廣義角

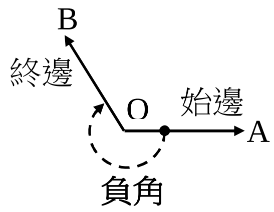
1.角：角是由共同端點的兩射線所組成的，如右圖，∠AOB 是由射線 OA 與射線 OB 所組成
又∠AOB 的大小是表示兩射線 OA 與 OB 張開的程度



2.有向角：由射線 OA 以 O 點為中心旋轉至射線 OB，有方向的角稱為**有向角**

設射線 OA 稱為角的**始邊**，射線 OB 稱為角的**終邊**，則：
依逆時針方向旋轉出的角為「**正角**」，且不限制旋轉的圈數
依順時針方向旋轉出的角為「**負角**」，且不限制旋轉的圈數





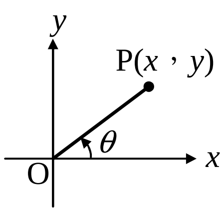
3.廣義角：①具突破 0~180 度的限制，且②具有方向性(正負)的角，稱為**廣義角**

(1)突破 0~180 度的限制：任一角度皆可稱為廣義角

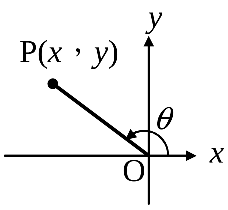
(2)標準位置角：以原點為角的頂點，以 ***x* 軸正方向為起點**的角稱為**標準位置角**

4.第□象限角與軸上角：

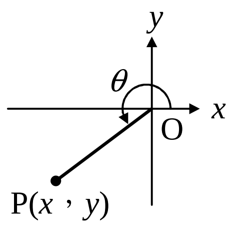
(1)第□象限角：廣義角的終邊落在第一、二、三或四象限內，稱這個角為第一、二、三或四象限角



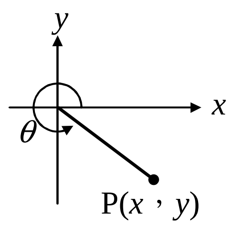
第一象限角



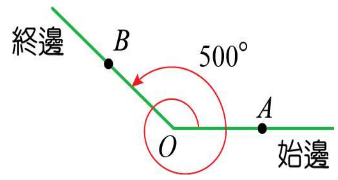
第二象限角



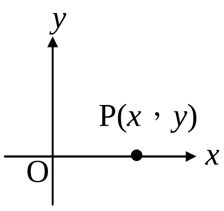
第三象限角

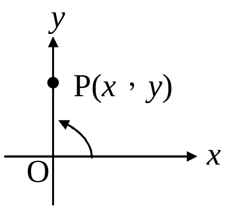


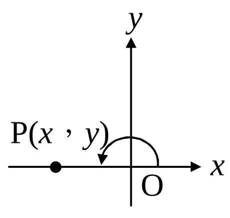
第四象限角

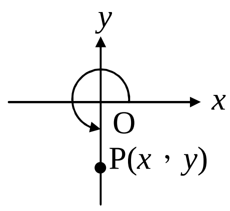


(2)軸上角：廣義角的終邊落在 *x* 軸或 *y* 軸上，稱為軸上角(或象限角)



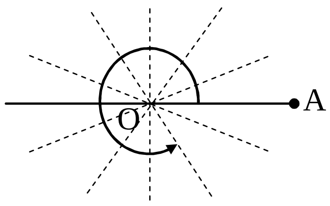




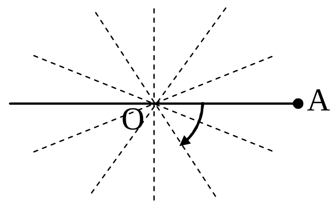


例 1.1：將 360°平分為 12 等分，以射線 *OA* 為始邊，求下列以紅色標示旋轉量的各廣義角之角度：

(1)



(2)



例 1.2：下列各角在標準位置時，分別為第幾象限角或軸上角？

(1)－100° (2) 120° (3)－30° (4) 90°

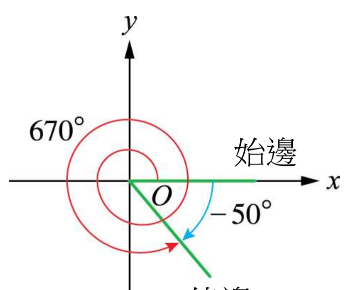
重點 2：同界角

1.意義：當兩個廣義角 θ 與 ϕ 有相同的**始邊**與**終邊**時，稱為 θ 與 ϕ 互為同界角

2.性質：

(1)任意兩同界角的度數相差 360°的**整數倍** 背
即若 θ 與 ϕ 為兩同界角，則 $\theta-\phi=360°\cdot k$，k 為整數

(2)任意一廣義角有**無限多個**(正；負)的同界角，其中：
最小正同界角：正同界角中最小的角，其範圍為 0° ≤ 最小正同界角＜360°
最大負同界角：負同界角中最大的角，其範圍為－360° ≤ 最大負同界角＜0°



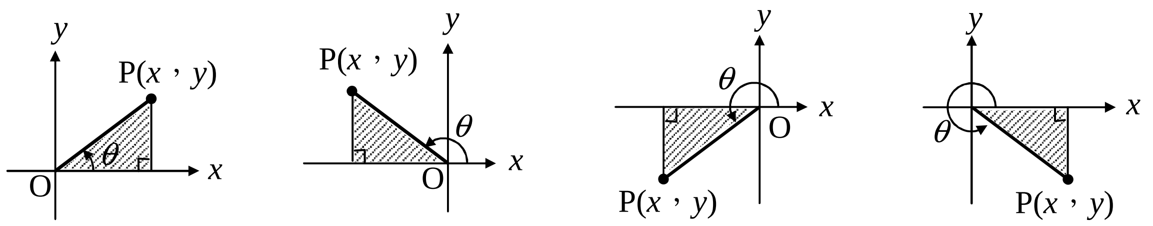
例 2.1：試求下列廣義角的同界角 θ ，且 $0° \leq \theta < 360°$ (最小正同界角)

(1) 1000°　　　　(2) $-200°$

重點 3：廣義角(象限內)的三角函數值

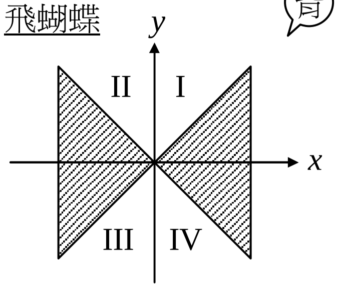
1.廣義角 θ 在各象限內之直角三角形： 背

設 θ 為一標準位置角，P(x，y)為其終邊上的一點，$\overline{OP}=r$，則：



第一象限角　　第二象限角　　第三象限角　　第四象限角

飛蝴蝶 背



2.廣義角 θ 的三角函數值求法：

(1)先求得第□象限角，在此象限內做出直角三角形，並決定該廣義角的邊角關係

(2)再根據三角函數的定義求得其三角函數值：$\sin\theta=\dfrac{y}{r}$，$\cos\theta=\dfrac{x}{r}$，$\tan\theta=\dfrac{y}{x}\ (x\neq 0)$

註：同界角的三角函數值**相等**

例 3.1：已知 P(4，-3)是標準位置角 θ 終邊上的一點，試求 $\sin\theta$，$\cos\theta$，$\tan\theta$ 的值

例 3.2：利用廣義角三角比的定義，試求下列各值：

(1) sin120°　　(2) cos120°　　(3) tan120°

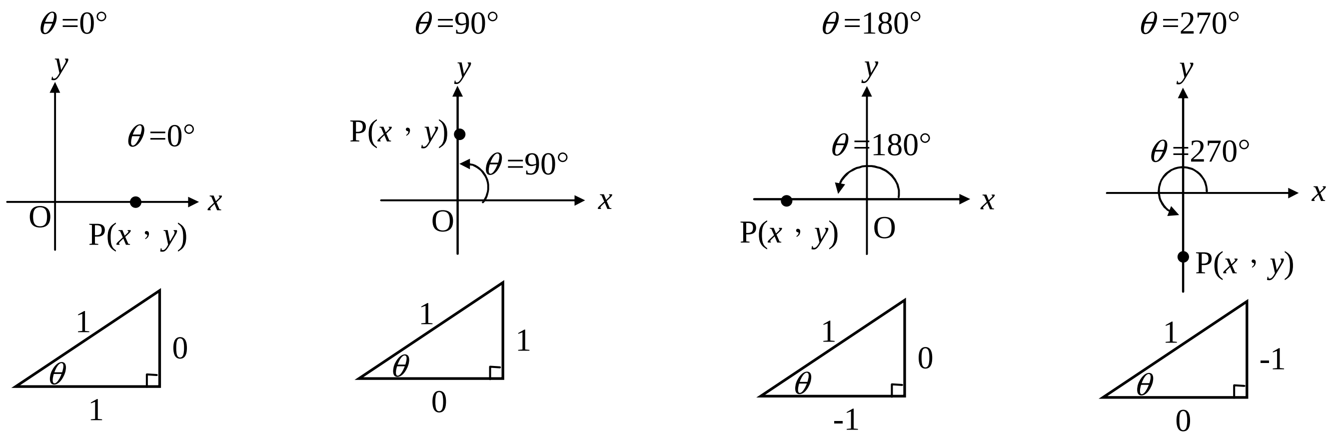
例 3.3：利用廣義角三角比的定義，試求下列各值：

(1) sin($-150°$)　　(2) cos($-150°$)　　(3) tan($-150°$)

重點 4：廣義角軸上角(象限角)的三角函數值

廣義角 θ 在軸上角(象限角)之直角三角形的邊角關係：

設 θ 為一標準位置角，P(x，y)為 x 軸、或 y 軸上的一點，令 $\overline{OP}=r=1$，則：



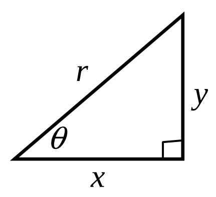
例 4.1：利用廣義角三角比的定義，試求下列各 sinθ，cosθ，tanθ 值：(沒有定義時，以 X 表示)

θ	sinθ	cosθ	tanθ
0°			
90°			
180°			
270°			

重點 5：廣義角的三角函數值之正負

設 θ 為一標準位置角，P(x，y)為 x 軸、或 y 軸上的一點，令 $\overline{OP}=r$，則：

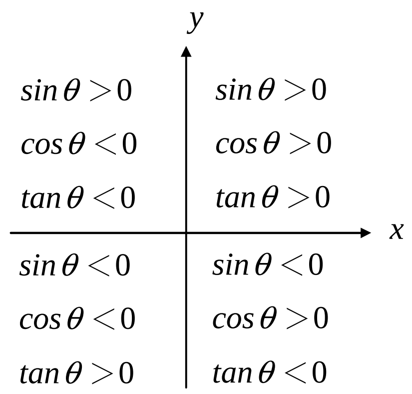
背



$\sin\theta=\dfrac{y}{r}$，$\Rightarrow$ $\sin\theta$ 的正負由_____決定

$\cos\theta=\dfrac{x}{r}$，$\Rightarrow$ $\cos\theta$ 的正負由_____決定

$\tan\theta=\dfrac{y}{x}$，$\Rightarrow$ $\tan\theta$ 的正負由_____決定



例 5.1：判斷各象限中三角函數值的正負情形，並完成下列表格：

θ 中邊所在象限	第一象限	第二象限	第三象限	第四象限
(x，y)				
sin θ				
cos θ				
tan θ				

例 5.2：根據下列各條件，分別指出各 θ 角是第幾象限角？

(1) $\sin\theta<0$ 且 $\cos\theta>0$ (2) $\tan\theta>0$ 且 $\cos\theta<0$

例 5.3：試求下列各值：

(1) $\sin420°$ (2) $\cos(-330°)$ (3) $\tan765°$

◎計算機計算

例 5.4：利用計算機，求下列各值：(四捨五入至小數點以下第 1 位)

(1) $\sin143°$ (2) $\cos(-37°)$

例 5.5：已知 θ 是第四象限角且 $\cos\theta=\frac{4}{5}$，求 $\sin\theta$ 和 $\tan\theta$ 的值。

重點 6：廣義角三角函數的性質 背

1.商數關係：當角 θ 的終邊不在 y 軸上時，則 $\tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}$

2.平方關係：對於任意角 θ，則 $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$

3.單位圓上任意點 P 的坐標為 P($\cos\theta$，$\sin\theta$)

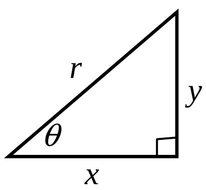
4.奇偶函數：

(1)廣義角三角函數中，$\sin\theta$、$\tan\theta$ 為奇函數，$\cos\theta$ 為偶函數

(2)性質：(負角關係)如右表

奇函數 $\sin(-\theta)=-\sin\theta$、$\tan(-\theta)=-\tan\theta$

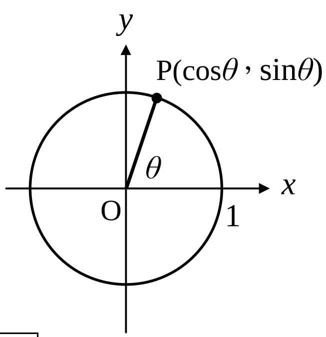
偶函數 $\cos(-\theta)=\cos\theta$



$\sin\theta=\frac{y}{r}$

$\cos\theta=\frac{x}{r}$

$\tan\theta=\frac{y}{x}$



	θ	$-\theta$
sin	$\sin\theta$	$-\sin\theta$
cos	$\cos\theta$	$\cos\theta$
tan	$\tan\theta$	$-\tan\theta$

例 6.1：在空格內填入適當的符號(＋，－)

(1) $\sin(-45°)=\square\sin 45°=$____

(2) $\cos(-30°)=\square\cos 30°=$____

(3) $\tan(-60°)=\square\tan 60°=$____

重點 7：水平軸廣義角 $0°\pm\theta$，$180°\pm\theta$(補角)與鉛直軸 $0°\pm\theta$(餘角)，$270°\pm\theta$ 的三角函數值

1.意義：(1)**水平軸**廣義角 $0°\pm\theta$ 與 $180°\pm\theta$ 的三角函數**不變**，正負以所在象限的函數判斷

(2)**鉛直軸**廣義角 $90°\pm\theta$ 與 $270°\pm\theta$ 的三角函數**變(互餘)**，正負以所在象限的函數判斷

2.**水平軸**廣義角性質：

(1) $0°+\theta$ 為第一象限角，$\sin(0°+\theta)=\sin\theta$， $\cos(0°+\theta)=\cos\theta$， $\tan(0°+\theta)=\tan\theta$

(2) $0°-\theta$ 為第四象限角，$\sin(0°-\theta)=-\sin\theta$， $\cos(0°-\theta)=\cos\theta$， $\tan(0°-\theta)=-\tan\theta$

(3) $180°+\theta$ 為第三象限角，$\sin(180°+\theta)=-\sin\theta$， $\cos(180°+\theta)=-\cos\theta$， $\tan(180°+\theta)=\tan\theta$

(4) $180°-\theta$ 為第二象限角，$\sin(180°-\theta)=\sin\theta$， $\cos(180°-\theta)=-\cos\theta$， $\tan(180°-\theta)=-\tan\theta$

3.**鉛直軸**廣義角性質：($\tan\theta$ 暫不討論)

(1) $90°+\theta$ 為第二象限角，$\sin(90°+\theta)=\cos\theta$， $\cos(90°+\theta)=-\sin\theta$

(2) $90°-\theta$ 為第一象限角，$\sin(90°-\theta)=\cos\theta$， $\cos(90°-\theta)=\sin\theta$

(3) $270°+\theta$ 為第四象限角，$\sin(270°+\theta)=-\cos\theta$， $\cos(270°+\theta)=\sin\theta$

(4) $270°-\theta$ 為第三象限角，$\sin(270°-\theta)=-\cos\theta$， $\cos(270°-\theta)=-\sin\theta$

結論：

	$0°+\theta$	$0°-\theta$	$180°+\theta$	$180°-\theta$	$90°+\theta$	$90°-\theta$	$270°+\theta$	$270°-\theta$
象限(x，y)								
sin								
cos								
tan								

例 7.1：利用三角比運算性質，求下列各三角函數值：

(1) $\sin 150°$　(2) $\cos 210°$　(3) $\tan(-45°)$　(4) $\tan 660°$

重點 8：銳角三角函數值之遞增、遞減

性質：當角度由 0°增大為 90°時：

(1)正弦函數值由 sin0°遞增為 sin90°，亦即函數值由 0 遞增為 1

(2)餘弦函數值由 cos0°遞減為 cos90°，亦即函數值由 1 遞減為 0

(3)正切函數值由 tan0°遞增至 tan45°，再增為 tan90°，亦即函數值由 0 遞增至 1，再增為∞(無限大)

例 8.1：試比較下列各組函數值之大小關係：

(1) $a=\sin 50°$　　$b=\sin 140°$　　$c=\sin 440°$

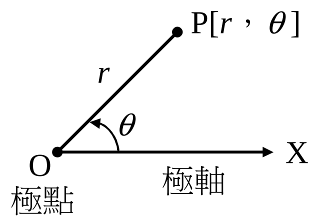
(2) $a=\cos 50°$　　$b=\cos 140°$　　$c=\cos 440°$

重點 9：直角坐標與極坐標

1.極坐標定義：利用距離和方向描述一個點的位置

(1)若在平面上選定一點 O (稱為原點或極點，簡稱極)，以 O 為端點向右作一水平射線 OX (稱為極軸，簡稱軸)則稱為極坐標。

(2)對於平面上異於 O 的任一點 P，如右圖



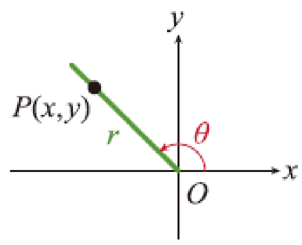
設 $\overline{OP}=r>0$，且若以極軸為始邊，射線 OP 為終邊的廣義角度數為 θ，$0°\le\theta<360°$

則用符號 P[r，θ]表示 P 點的位置，[r，θ]稱為 P 點的一個極坐標

註：(1)極點 O 的極坐標為[0，θ]，其中 θ 為任意角

(2)因為同界角具有相同的始邊與終邊，所以極坐標的**表示法並不唯一**

2.直角坐標與極坐標的轉換：



設直角坐標與極坐標的原點、單位長相同，且極坐標的極軸與直角坐標的 x 軸正向也相同。

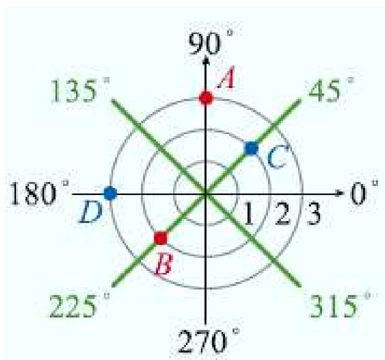
已知平面上異於原點的點 P，設 P(x，y)$\equiv$P[r，θ]

(1)若已知直角坐標點 P(x，y)，則極坐標為 P [r，θ]，其中 $r=\sqrt{x^2+y^2}$，$\cos\theta=\dfrac{x}{r}$，$\sin\theta=\dfrac{y}{r}$

(2)若已知極坐標點 P[r，θ]，則直角坐標為 P(x，y)，其中 $x=r\cos\theta$，$y=r\sin\theta$

註：直角坐標與極坐標的轉換亦可利用廣義角做轉換

例 9.1：寫出右圖中 A，B 兩點的極坐標



例 9.2：(1)已知 P 點的極坐標為[4，300°]，試求 P 點的直角坐標

(2)已知 Q 點的直角坐標為(－2，－2)，試求 Q 點的極坐標