單元 10　直角三角形的三角比　　　　一年____班　座號：____　姓名：

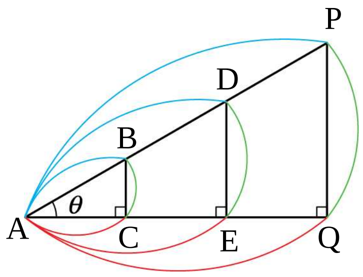
重點 1：直角三角形邊的比例

意義：兩相似的三角形，其三邊長的比例是**固定的**，不因三角形的大小不同而改變

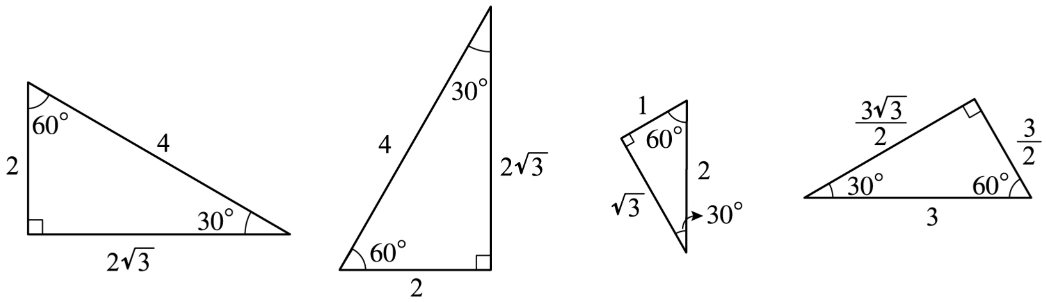
註：(1)若△ABC～△A′B′C′ (根據 AA 相似)，則對應邊成比例，對應角相等

(2)如右圖，相似的三角形△ABC～△ADE～△APQ 中，

邊長的比例和三角形的大小無關，只和銳角 θ (讀做 *theta*)的大小有關



例 1.1：試觀察下列大小不同的 30°－60°－90°直角三角形：



(1)根據________性質，上列直角三角形皆相似，其三邊長的比都是________

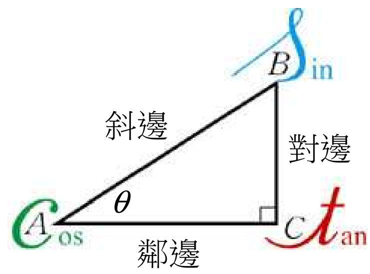
(2)試求下列各比值：

(A)$\dfrac{30°\text{的對邊長}}{\text{斜邊長}}=$______　(B)$\dfrac{30°\text{的鄰邊長}}{\text{斜邊長}}=$______　(C)$\dfrac{30°\text{的對邊長}}{30°\text{的鄰邊長}}=$______

重點 2：銳角三角函數(三角比)

1.定義：直角△ABC 中，設$\angle C=90°$，如右圖

對∠A 而言，$\overline{BC}$ 稱作$\angle A$ 的**對邊**，$\overline{AC}$ 稱作$\angle A$ 的**鄰邊**，$\overline{AB}$ 稱作$\angle A$ 的**斜邊**



(1)∠A 的**正弦**函數(sine A)，$\sin A=\dfrac{\angle A\text{的對邊}}{\text{斜邊}}=\dfrac{\overline{BC}}{\overline{AB}}$

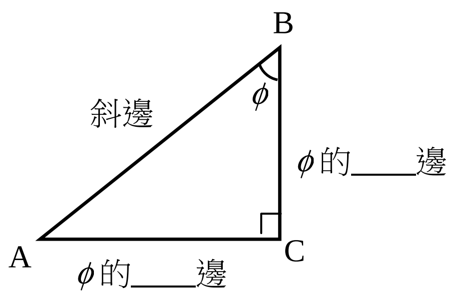
(2)∠A 的**餘弦**函數(cosine A)，$\cos A=\dfrac{\angle A\text{的鄰邊}}{\text{斜邊}}=\dfrac{\overline{AC}}{\overline{AB}}$

(3)∠A 的**正切**函數(tangent A)，$\tan A=\dfrac{\angle A\text{的對邊}}{\angle A\text{的鄰邊}}=\dfrac{\overline{BC}}{\overline{AC}}$

2.性質：(1)以θ表示任一銳角時，則三角函數表為 $\sin\theta$，$\cos\theta$，$\tan\theta$

(2)銳角θ的 $\sin\theta$，$\cos\theta$，$\tan\theta$ 皆為兩邊長的比值，為**不具單位**的正數

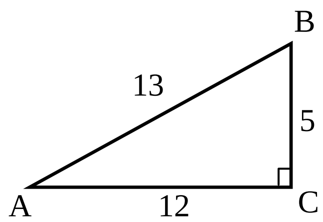
(3) $\angle A$ 為銳角時，$0<\sin A<1$ 且 $0<\cos A<1$，$\tan A>0$



註：如右圖，設$\angle B=\phi$，則$\overline{BC}$稱作$\angle B$ 的____**邊**，$\overline{AC}$稱作$\angle B$ 的____**邊**

$\Rightarrow \sin\phi=$ $\boxed{}$　$\cos\phi=$ $\boxed{}$　$\tan\phi=$ $\boxed{}$

例 2.1：在三角形 ABC 中，已知∠C＝90°，$\overline{AB}=13$，$\overline{AC}=12$，$\overline{BC}=5$，試求 $\sin A$，$\cos A$，$\tan A$ 的值



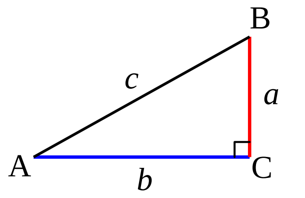
例 2.2：已知∠A 為銳角且 $\sin A=\dfrac{2}{3}$，求 cosA 和 tanA 的值。

重點 3：正射影

意義：在直角三角形 ABC 中，$\angle C$ 為直角，以 a，b，c 分別表示$\angle A$，$\angle B$，$\angle C$ 的對邊長

則 $\overline{AC}$ 為 $\overline{AB}$ 在直線 AC 上的正射影，其長度 $b=\overline{AC}=\overline{AB}\cos A=c\cos A$

同理 $a=\overline{BC}=\overline{AB}\sin A=c\sin A$

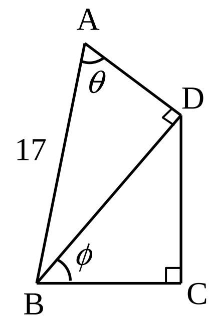


說明：由三角比的定義：

由 $\sin A=\dfrac{a}{c}$，得知 $a=c\cos A$　　由 $\cos A=\dfrac{b}{c}$，得知 $b=c\cos A$

例 3.1：如圖，ΔABD 與ΔBCD 皆為直角三角形，已知 $\overline{AB}=17$，$\sin\theta=\dfrac{15}{17}$，$\cos\phi=\dfrac{3}{5}$，試求：

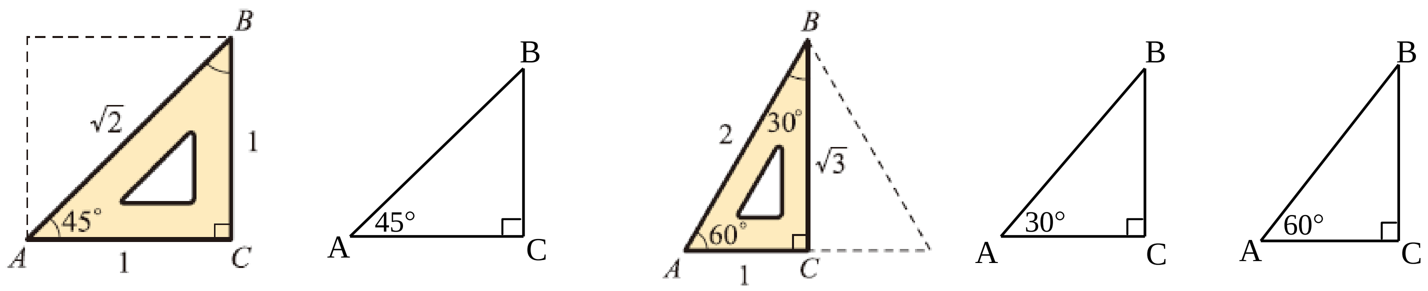
(1) $\overline{BD}=$_____　　(2) $\overline{BC}=$_____　　(3) $\overline{CD}=$_____



重點 4：常用直角三角比(銳角三角函數)

1.意義：常用的三角板分別有，如下圖：

(1)正方形的一半(45°－45°－90°)　　(2)正三角形的一半(30°－60°－90°)



利用畢氏定理可得這兩個三角形的邊長比分別為 $1:1:\sqrt{2}$ 與 $1:\sqrt{3}:2$

故將 30°，45°，60° 稱為三個常用的直角三角比(特別角)

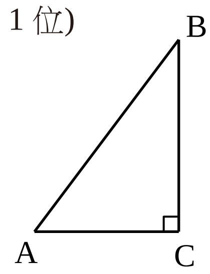
2.當角度不是特別角時，可以透過計算機的操作求三角比

例 4.1：利用計算器，求 sin 5°，cos 20°，tan 37° 等值

解：sin 5°：Deg → 5 → sin → sind(5) 0.08715574274765817355806427083747

例 4.2：(1)試分別求出 $\sin 30°$，$\sin 45°$及 $\sin 60°$的值

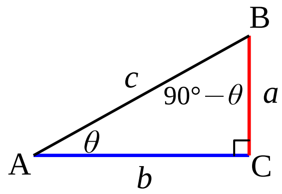
(2)利用直尺測量右圖三角形的三邊長來估算 $\sin A$ 的值與 A 的角度(四捨五入到小數點以下第 1 位)



重點 5：三角比的基本關係

1.意義：在直角△ABC 中，$\angle C$ 為直角，若$\angle A=\theta$ ，且以 a，b，c 分別表示∠A，∠B，∠C 的對邊長，如下圖

背 則$\sin\theta=\dfrac{a}{c}$ ，$\cos\theta=\dfrac{b}{c}$ ，$\tan\theta=\dfrac{a}{b}$



2.基本關係：$0°<\theta<90°$

(1)商數關係式：$\tan\theta=\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$

(2)平方關係式：$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$　　($(\sin\theta)^2=\sin^2\theta$，$(\cos\theta)^2=\cos^2\theta$)

(3)餘角關係式：$\sin(90°-\theta)=\cos\theta$　　$\cos(90°-\theta)=\sin\theta$

例 5.1：利用商數關係式與平方關係式，完成下列空格：

(1) $\dfrac{\sin 18°}{\cos 18°}=$______　　(2) $\tan 20°\cdot\cos 20°=$______

例 5.2：試求下列各式的值：

(1) $\cos^2 34°+\cos^2 56°$　　(2) $\tan^2 65°-\dfrac{1}{\cos^2 65^0}$

重點 6：三角(比)函數的基本性質

1. $\underline{(\sin\theta+\cos\theta)^2}=\sin^2\theta+2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta=\underline{1+2\sin\theta\cos\theta}$

$\underline{(\sin\theta-\cos\theta)^2}=\sin^2\theta-2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta=\underline{1-2\sin\theta\cos\theta}$

2. $\sin^3\theta+\cos^3\theta=(\sin\theta+\cos\theta)(\sin^2\theta-\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta)=(\sin\theta+\cos\theta)(1-\sin\theta\cos\theta)$

3. $\dfrac{1-\cos\theta}{\sin\theta}=\dfrac{\sin\theta}{1+\cos\theta}=\dfrac{1+\sin\theta-\cos\theta}{1+\sin\theta+\cos\theta}$

4. $\dfrac{1-\cos\theta}{\sin\theta}+\dfrac{\sin\theta}{1+\cos\theta}=\dfrac{2}{\sin\theta}$

例 6.1：已知 θ 為銳角，且 $\sin\theta+\cos\theta=\frac{7}{5}$，試求下列各值：

(1) $\sin\theta\cos\theta$　　(2) $\sin^3\theta+\cos^3\theta$

重點 7：銳角三角比的應用與簡易測量

1.意義：運用三角比之定義，計算三角函數之值，並作簡易量測

2.常用測量的名詞

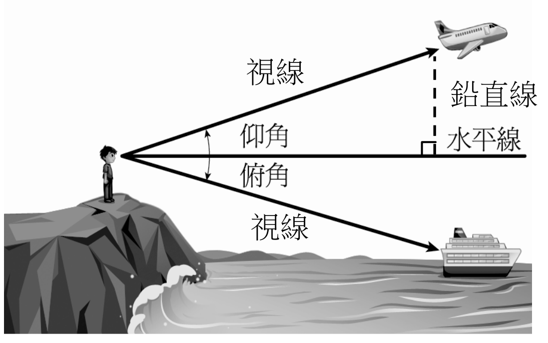
(1)鉛垂線：物體與地心的連線稱做鉛垂線

(2)水平線：和鉛垂線垂直的線稱為水平線

(3)視線(觀物線)：觀測者眼睛與目標物觀測點的直線

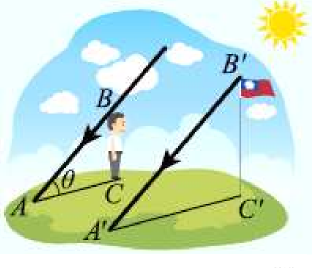
(4)仰角：觀測高處目標時，視線與水平線間的夾角

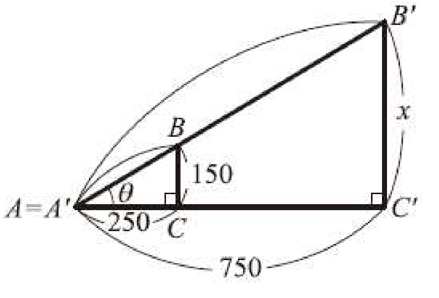
(5)俯角：觀測低處目標時，視線與水平線間的夾角



例 7.1：早上升旗時，陽光沿著同一個方向平行照射而來，與地面形成了一個固定的角度 θ，如右示意圖，又某生的身高為 150 公分，且測得影子長度為 250 公分，試求：

(1) $\tan\theta$ 的值　　(2)已知升旗桿影子長度為 750 公分，求升旗桿的高度





例 7.2：想測量臺北 101 大樓的高度，先在地面上 A 點測得樓頂的仰角為 45°，再朝大樓方向前進 370 公尺到達 B 點，得樓頂的仰角為 75°，求大樓高度。(四捨五入到整數位)