費波那契數列(Fibonacci Sequence)　　(學生講義)

十三世紀的義大利數學家費波那契 (Fibonacci，約 1170-1250) 在 1202 年發表了「算盤書」《Liber abacci》，書中提出了一個有趣的問題，也就是著名的兔子問題：「假定一對兔子出生滿兩個月就可以生一對小兔子(一雄一雌)，之後每一個月又可以再生一對小兔子。假定現在有一對剛生下來的小兔子，請問一年以後應該有幾對兔子(如果生下的小兔都不死的話)？」

我們來算一下：

第一個月：只有一對小兔；

第二個月：小兔生長成大兔還不會生殖，仍只有一對兔子；

第三個月：這對大兔生了一對小兔，這時有兩對兔子；

第四個月：老兔又生了一對小兔，而上個月的小兔長成大兔這時共有三對兔子

…

問題 1：(1)請同學完成下表：以 F_n 表示在第 n 個月擁有兔子的總對數

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
F_n												

如此繼續推算下去，將每個月兔子的數量排列起來，我們可以得到一個數列稱為「**費波那契數列**」，簡稱「**費氏數列**」。

(2)請同學觀察一下此數列，各項之間有何關聯性？

答：______________________________

解：(1)

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
F_n	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144

(2) $F_1 = F_2 = 1$ 且 $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$， $n \geq 1$

問題 2: 把費氏數列中的前項除後項，我們得到一個新數列為? 觀察此新數列，你發現了什麼?

答：______________________________

____

解：新數列為1、2、1.5、1.67、1.6、1.63、1.615、1.619、1.618、……，此新數列將會越來越接近一個數字1.618⋯，這個數字被稱為「黃金比例」

問題 3：在費氏數列中，$F_1=1$，$F_2=1$，$F_{n+2}=F_{n+1}+F_n$，$n\geq 1$，由遞迴數列求一般式的方法可得 $F_n=\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right]$，$n\geq 1$，請用數學歸納法證明之。

證明：(1)當 $n=1$ 時，$F_1=\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^1-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^1\right]=1$ 成立

當 $n=2$ 時，$F_2=\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2\right]=1$ 成立

(2)設 $n=k$ 時，$F_k=\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^k-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^k\right]$ 成立

且 $n=k+1$ 時，$F_{k+1}=\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{k+1}-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{k+1}\right]$ 成立，

則當 $n=k+1$ 時，

$$F_{k+2}=F_{k+1}+F_k=\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{k+1}-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{k+1}\right]+\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{k}-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{k}\right]$$

$$=\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{k+1}+\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{k}-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{k+1}-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{k}\right]$$

$$=\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{k}-\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{k}\right]$$

$$=\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{2}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{k}-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{2}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{k}\right]$$

$$=\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{k+2}-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{k+2}\right]$$ 亦成立

由數學歸納法知 $F_n=\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right]$，$n\geq 1$

費波那契數列是從一個人為的數學問題提出並發展的，出人意料的是在自然界中到處可見費氏數列的蹤跡。例如，向日葵的花盤(如圖)，從盤心向外輻射出來的螺旋線弧把花盤分割為含有花籽的菱形小塊，奇妙的是，如果數一下順時針方向伸展的螺線，然後在數逆時針方向伸展的螺線，可以發現這兩個數目是費波那契數列的兩個相鄰項「34 及 55」，較大的向日葵的螺旋線數目則為「89 及 144」，更大的甚至還有「144 及 233」

費氏數列也明顯地表現在植物的葉序上，葉子為了行光合作用，淋到雨水與呼吸最多空氣，使它們能夠均衡成長，所以生長行徑成螺線移動(葉序 Phyllotaxis)，例如，就櫻樹而言，在其一枝上，用細線把相鄰的葉子，沿著同一方繞著樹枝下去，我們可以發現此線繞成螺旋的樣子，且每經五片葉子，每繞樹枝兩圈，葉子的位置就回到原來的位置，我們把櫻樹的葉序稱為$\dfrac{2}{5}$。

$$葉序＝\frac{回到原位置時所繞樹枝的圈數}{回到原位置時所經的葉子數}$$

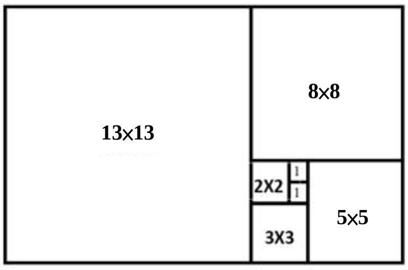
其他如梨樹的葉序是$\dfrac{3}{8}$，柳樹的葉序是$\dfrac{5}{13}$等等，你會發現所有的葉序，分子分母都是費氏數列中的數字。

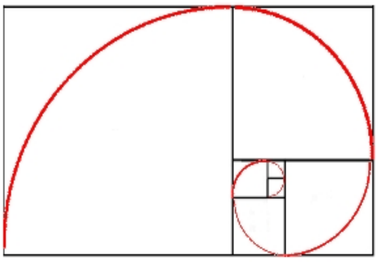
又如像松果和鳳梨外皮的排列也可以找到費氏數列的影子喔!這就是大自然的奧妙。

問題4：在自然界中，花朵的花瓣數大都是3，5，8，13，21，34，55，89，這些都是費氏數列中的數字，沒有任何其他數目出現的那麼頻繁。生活中你在那些花朵上看到費氏數列的身影呢 ？ 請舉例。

答：火鶴為 1 瓣；百合:3 瓣；杜鵑、梅花:5 瓣；金盞花:13，21 瓣；
向日葵不是 21 瓣就是 34 瓣；雛菊大多是 34，55，89 瓣

最後，我們來欣賞這幾張圖片做結尾吧。





性質：$F_1^{\,2}+F_2^{\,2}+\cdots+F_n^{\,2}=F_n\cdot F_{n+1}$

如：$1^2+1^2+2^2+3^2+5^2=5\cdot 8$

$1^2+1^2+2^2+3^2+5^2+8^2=5\cdot 13$