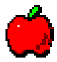
數學家故事~牛頓（學生講義）

一、前言：數學家、物理學家、天文學家、化學家、自然哲學家

聽到『牛頓』二個字，你最先聯想到的是什麼？蘋果、F＝ma、萬有引力，還是其他？

答：________________________________

有個故事是這樣流傳著的：

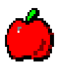
有一天，牛頓坐在蘋果樹下沈思，突然一棵熟透了的  掉下來，打到了他的頭。牛頓恍然大悟，喔～～

原來蘋果會從樹上掉下來和月亮會繞著地球轉是同樣一回事，都是**萬有引力**造成的。

於是，牛頓寫出了下面這個永垂不朽的式子：

$$F＝G\frac{Mm}{r^2}$$

這個故事據說是發生在 1665 年，牛頓剛取得劍橋大學的學位。這時英國流行瘟疫，當年夏天，他離開劍橋，回到鄉下避難，在這二年間，牛頓想通了很多問題，這些思想日後都變成了偉大的定律。

不過根據很多學者的考據，這個膾炙人口的蘋果故事是虛構的。話說回來，既然是故事，就不見得一定是真有其事，因此，我們就順著這個故事繼續說下去……這一顆引發牛頓思緒，對物理世界有偉大貢獻的 ，我稱它為『**牛頓蘋果**』

牛頓的物理學指導我們科學發展長達兩百多年，在二十世紀以前，人們以為牛頓的學說已經是物理學的頂峰，一切物理學的疑難都可以在他的學說中找到答案。但是，他的經典力學最後仍然被愛因斯坦的「相對論」修正了，現在物理學的發展也已經完全超越了他的學說內容；但是，牛頓提供了建立科學所需要的定理，促成了現代科學的誕生，你說，他是不是比任何人都偉大呢！

二. 研究內容：

在數學上，牛頓他也證明了<u>廣義二項式定理</u>，提出了「<u>牛頓法</u>」以趨近<u>函數</u>的零點，並為<u>冪級數</u>的研究作出了貢獻。

牛頓在數學方面有許多成就，我們從高中課程的兩個定理，來討論他數學方面的貢獻。

定理一：整係數多項式之一次因式檢驗法(或稱牛頓定理)

用途：整係數的 n 次方程式找有理根：

(1)一次因式檢驗定理：

設 $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x+a_0$ 為一個整係數 n 次多項式，若整係數一次式 $ax-b$ 是 $f(x)$的因式，且 a，b 互質，則：

a 是 $f(x)$的最高次項係數 a_n 的因數，b 是 $f(x)$的常數項 a_0 的因數

(2)有理根檢驗定理：

設 $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x+a_0=0$ 為一個整係數 n 次方程式，若 $x=\dfrac{b}{a}$ 為 $f(x)=0$ 之一有理根，a，b 為整數且互質，則 $a\mid a_n$ 且 $b\mid a_0$。

[注意]：本定理之逆不恆真即若 $a\mid a_n$ 且 $b\mid a_0$，則 $ax-b$ 不一定是 $f(x)$的因式。

例 1：試求方程式 $x^3+3x^2+4x+4=0$ 之有理根。

例 2：設 a，b，c 為整數，且 $x^4+ax^3+bx^2+cx+9=0$ 之四根為相異之有理數，

求 a，b，c 之值。

定理二：牛頓插值法

(1)若二次多項式 $f(x)$滿足 $f(x_1)=y_1$，$f(x_2)=y_2$，$f(x_3)=y_3$，

則可設 $f(x)=a(x-x_1)(x-x_2)+b(x-x_1)+c$

說明：多項式 $f(x)$是利用連續除法定理假設的，如下：（其中 $q(x)$ 為一次式）

$f(x)=(x-x_1)\,q(x)+c$，($q(x)$ 為一次式)

$=(x-x_1)[\,a(x-x_2)+b]=a(x-x_1)(x-x_2)+b(x-x_1)+c$

再將三個函數值代入求出 a，b，c 的值，即可求得 $f(x)$

(2)仿照(1)的方法可推廣到三次以上的多項式

例 1：已知二次多項式 $f(x)$滿足 $f(1)=10$，$f(2)=5$，$f(3)=6$，試求 $f(0)$的值。