


習題 2-4 解答


一、基本題

1. 將 100 萬元存入銀行，以年利率 1% 單利計算，每年計息一次，試問十年後本利和是多少元？

解以每年年利率 1% 單利計算，十年後的本利和為
 $100 \times (1 + 1\% \times 10) = 100 \times 1.1 = 110$ (萬元)，
 故十年後的本利和是 1100000 元

 2. 將 100 萬元存入銀行，以年利率 1% 複利計算，每年計息一次，試利用計算機計算十年後本利和約為多少元？(四捨五入至整數位)

解以每年年利率 1% 複利計算，十年後的本利和為
 $100 \times (1 + 1\%)^{10} = 100 \times (1.01)^{10}$
 $\approx 100 \times 1.104622125$
 ≈ 110.4622125 (萬元) ≈ 1104622 (元)
 故十年後的本利和約為 1104622 元

 3. 若某細菌的數量在 x 秒後滿足關係式 $f(x) = 400000 \times (1.05)^x$ ，其中 $f(x)$ 的單位為個。試利用計算機計算：
 (1) 當 $x = 10$ 時有多少個細菌？(四捨五入至整數位)
 (2) 試求最小的正整數 x 使得細菌總數超過 100 萬個。

解(1) 由題意知當 $x = 10$ 時有
 $f(10) = 400000 \times (1.05)^{10}$
 $\approx 400000 \times 1.628894627$
 $\approx 651557.8507 \approx 651558$ (個)

(2) 先求 $400000 \times (1.05)^x = 10^6$ ，
 化簡得 $(1.05)^x = 2.5$ ，
 等式兩邊同取對數 \log ，
 得 $x \log 1.05 = \log 2.5$ ，
 故 $x = \frac{\log 2.5}{\log 1.05} \approx 18.78023465$ ，
 故使得細菌總數超過 100 萬個的最小正整數 x 為 19

4. 胃酸的 pH 值為 2，汽水的 pH 值為 4。已知 pH 值的算法為 $-\log r$ ，其中 r 為氫離子濃度，單位為莫耳/升，試問胃酸的氫離子濃度為汽水的多少倍？


解 設胃酸的氫離子濃度為 r_1 ，
 汽水的氫離子濃度為 r_2 ，

$$\text{可知} \begin{cases} -\log r_1 = 2 \\ -\log r_2 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \log r_1 = -2 \\ \log r_2 = -4 \end{cases}$$

$$\text{又} \log \frac{r_1}{r_2} = \log r_1 - \log r_2 = (-2) - (-4) = 2,$$

故 $\frac{r_1}{r_2} = 10^2 = 100$ 。即胃酸的氫離子濃度為汽水的 100 倍

二、進階題

 5. 一個芮氏地震規模為 m 的地震釋放出的能量為 r 焦耳，兩者之間的關係為

$$\log r = 4.8 + 1.5m,$$

試以科學記號 $b \times 10^n$ 表示規模為 5 的地震所釋放出的能量為多少焦耳？（ b 值四捨五入至小數點後第一位）

解 設規模為 5 的地震所釋放出的能量為 r 焦耳，

$$\text{則 } \log r = 4.8 + 1.5 \times 5$$


$$= 4.8 + 7.5 = 12.3,$$

$$\text{因此 } r = 10^{12.3} = 10^{0.3} \times 10^{12}$$

$$\approx 1.995262315 \times 10^{12}$$

$$\approx 2.0 \times 10^{12} \text{ (焦耳)}$$

故規模為 5 的地震所釋放出的能量約為 2.0×10^{12} 焦耳

 6. 某公司希望透過在加入公司十年後的薪水加倍來吸引人才，如果此公司要達成此承諾，則必須每年固定調薪 $a\%$ ，試利用計算機計算 a 值。（四捨五入至小數點後第一位）

解 依題意，若每年調薪 $a\%$ ，則 10 年後薪水為原本薪水的 $(1+a\%)^{10}$ 倍，

$$\text{因此，若十年後的薪水要加倍，則 } \left(1 + \frac{a}{100}\right)^{10} = 2。$$

等式兩邊同取對數 \log 得

$$10 \log \left(1 + \frac{a}{100}\right) = \log 2 \Rightarrow \log \left(1 + \frac{a}{100}\right) = \frac{\log 2}{10} \approx 0.030102999,$$

$$\text{故 } 1 + \frac{a}{100} = 10^{0.030102999} \approx 1.071773463,$$

$$\text{因此 } \frac{a}{100} \approx 0.071773463, \text{ 得 } a \approx 7.1773463 \approx 7.2$$

7. 設某地區的果蠅數量原有 k 隻， x 天後有 $f(x)$ 隻，且 $f(x) = k \cdot a^x$ 。若 2 天後有 100 隻，4 天後有 400 隻，試求 5 天後該地區有幾隻果蠅？



解 依題意

$$\begin{cases} f(2) = k \cdot a^2 = 100 \\ f(4) = k \cdot a^4 = 400 \end{cases}$$


$$\text{所以 } \frac{f(4)}{f(2)} = \frac{k \cdot a^4}{k \cdot a^2} = \frac{400}{100},$$

$$\text{得 } a^2 = 4, \text{ 即 } a = 2。$$

$$\text{同理, } \frac{f(5)}{f(4)} = \frac{k \cdot a^5}{k \cdot a^4} = a = 2,$$

$$\text{故 } f(5) = 2 \cdot f(4) = 800。$$

即 5 天後該地區會有 800 隻果蠅

 8. 假設電腦打字輸入每分鐘 x 字時所需的練習時間符合函數

$$f(x) = -144 \log \left(1 - \frac{x}{100} \right), \text{ 其中練習時間的單位為分鐘,}$$

$0 < x < 100$, 試求:

- (1) 要達到打字速度每分鐘 20 字約需多少分鐘的練習時間?
(四捨五入至整數位)
- (2) 要達到打字速度每分鐘 40 字約需多少分鐘的練習時間?
(四捨五入至整數位)



解(1) 要達到打字速度每分鐘 20 字需

$$\begin{aligned} f(20) &= -144 \log \left(1 - \frac{20}{100} \right) = -144 \log \frac{80}{100} \\ &= -144 \log \frac{8}{10} \\ &= -144 (\log 8 - 1) \\ &\approx (-144) \times (-0.096910013) \\ &\approx 13.95504187 \approx 14, \end{aligned}$$

故大約需 14 分鐘的練習時間

(2) 要達到打字速度每分鐘 40 字需

$$\begin{aligned} f(40) &= -144 \log \left(1 - \frac{40}{100} \right) = -144 \log \frac{60}{100} \\ &= -144 \log \frac{6}{10} \\ &= -144 (\log 6 - 1) \\ &\approx (-144) \times (-0.221848749) \\ &\approx 31.94621994 \approx 32, \end{aligned}$$

故大約需 32 分鐘的練習時間