習題 1-1 解答

一、基本題

1. 試完成下表中角度的換算：

度	$15°$		$105°$		$330°$
弳	______弳	$\dfrac{5\pi}{12}$ 弳	______弳	$\dfrac{4\pi}{3}$ 弳	______弳

解

度	$15°$	$75°$	$105°$	$240°$	$330°$
弳	$\dfrac{\pi}{12}$ 弳	$\dfrac{5\pi}{12}$ 弳	$\dfrac{7\pi}{12}$ 弳	$\dfrac{4\pi}{3}$ 弳	$\dfrac{11\pi}{6}$ 弳

(1) $15°=15\times\dfrac{\pi}{180}=\dfrac{\pi}{12}$ 弳。

(2) $\dfrac{5\pi}{12}$ 弳 $=\dfrac{5\pi}{12}\times\left(\dfrac{180}{\pi}\right)^{\circ}=75°$。

(3) $105°=105\times\dfrac{\pi}{180}=\dfrac{7\pi}{12}$ 弳。

(4) $\dfrac{4\pi}{3}$ 弳 $=\dfrac{4\pi}{3}\times\left(\dfrac{180}{\pi}\right)^{\circ}=240°$。

(5) $330°=330\times\dfrac{\pi}{180}=\dfrac{11\pi}{6}$ 弳。

2. 試利用計算機求下列各值，並四捨五入至小數點後第二位。

(1) $\sin\dfrac{2\pi}{3}$。　(2) $\cos\dfrac{3\pi}{4}$。　(3) $\tan\dfrac{\pi}{4}$。

解〔解法一〕

(1) 在 RAD 的模式下，依序鍵入 2，×，SHIFT，EXP，÷，3，=，sin，

可得 0.866025403，故 $\sin\dfrac{2\pi}{3}\approx 0.87$。

(2) 在 RAD 的模式下，依序鍵入 3，×，SHIFT，EXP，÷，4，=，cos，

可得 -0.707106781，故 $\cos\dfrac{3\pi}{4}\approx -0.71$。

(3) 在 RAD 的模式下，依序鍵入 SHIFT，EXP，÷，4，=，tan，

可得 1，故 $\tan\dfrac{\pi}{4}=1.00$。

〔解法二〕

(1) $\dfrac{2\pi}{3}=\dfrac{2\pi}{3}\times\left(\dfrac{180}{\pi}\right)^{\circ}=120°$，故 $\sin\dfrac{2\pi}{3}=\sin 120°=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\approx 0.87$。

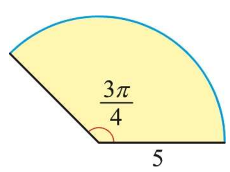
(2) $\dfrac{3\pi}{4}=\dfrac{3\pi}{4}\times\left(\dfrac{180}{\pi}\right)^{\circ}=135°$，故 $\cos\dfrac{3\pi}{4}=\cos 135°=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\approx -0.71$。

(3) $\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{\pi}{4}\times\left(\dfrac{180}{\pi}\right)^{\circ}=45°$，故 $\tan\dfrac{\pi}{4}=\tan 45°=1.00$。

3. 一扇形的圓心角為 $\dfrac{3\pi}{4}$，半徑為 5 公分，如右圖，試求此扇形的

(1) 弧長。

(2) 面積。



解 (1) 弧長 $s=5\times\dfrac{3\pi}{4}=\dfrac{15\pi}{4}$（公分）。

(2) 面積 $A=\dfrac{1}{2}\times 5^2\times\dfrac{3\pi}{4}=\dfrac{75\pi}{8}$（平方公分）。

4. 若一圓的半徑為 1 單位長，試求以下對應的弧長各為多少單位長？

(1) 半圓周。

(2) $\dfrac{1}{6}$ 圓周。

解 (1) 半圓周所對應的角度為 π 弳，所以對應的弧長為 $1\times\pi=\pi$ 單位長。

(2) $\dfrac{1}{6}$ 圓周所對應的角度為 $\dfrac{2\pi}{6}=\dfrac{\pi}{3}$ 弳，所以對應的弧長為 $1\times\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{\pi}{3}$ 單位長。

5. 時鐘從 7 點 35 分到 8 點，共經過 25 分鐘，試求時針與分針各繞了多少弳？

解 分針每分鐘繞 $6°=\dfrac{\pi}{30}$（弳），時針每分鐘繞 $\left(\dfrac{1}{2}\right)^{\circ}=\dfrac{\pi}{360}$（弳），

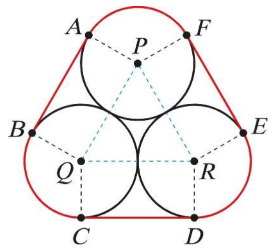
因為從 7 點 35 分到 8 點共經過 25 分鐘，

故分針共繞了 $25\times\dfrac{\pi}{30}=\dfrac{5\pi}{6}$ 弳，時針共繞了 $25\times\dfrac{\pi}{360}=\dfrac{5\pi}{72}$ 弳。

二、進階題

6. 小美知道小甄喜歡泡茶，特地買了 3 罐知名的茶葉要送給小甄。已知茶葉罐為底面半徑為 5 公分的圓柱體，若小美想將這 3 罐茶葉罐如右圖方式綁在一起（不計算打結的繩長），試問繩長至少需要多少公分？

解 如右圖，$\angle APQ=\angle FPR=\dfrac{\pi}{2}$，$\angle QPR=\dfrac{\pi}{3}$，



則 $\angle APF=\dfrac{2\pi}{3}$，同理 $\angle BQC=\angle DRE=\dfrac{2\pi}{3}$，

即 弧 $\overset{\frown}{AF}$ + 弧 $\overset{\frown}{BC}$ + 弧 $\overset{\frown}{DE}$ = 圓周，

故繩長至少需要弧 $\overset{\frown}{AF}$ + 弧 $\overset{\frown}{BC}$ + 弧 $\overset{\frown}{DE}+\overline{AB}+\overline{CD}+\overline{EF}$

$=2\pi\times5+3\times10=30+10\pi$（公分）。

7. 角度為 1 至 10 的正整數弳中，有幾個屬於第二象限角？

解 因為 1 弳 ≈ 57.3°，如下表，

弳	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
度	57.3°	114.6°	171.9°	229.2°	286.5°	343.8°	401.1°	458.4°	515.7°	573°

所以 2 弳，3 弳，8 弳，9 弳，共 4 個屬於第二象限角。

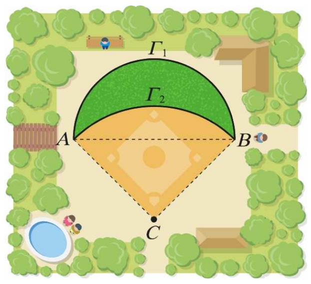
8. 已知一扇形的面積為 4 平方公分，圓心角為 2 弳，試求此扇形的周長為多少公分？

解 扇形面積 $A=\frac{1}{2}r^2\theta$ ⇨ $4=\frac{1}{2}r^2\times 2$ ⇨ $r=2$，

弧長 $s=r\theta=2\times 2=4$，

故扇形周長為 $2r+s=4+4=8$ 公分。

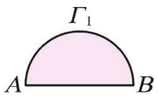
9. 如右圖，公園中有一設計成新月形之區域(即 Γ_1 與 Γ_2 所圍成之區域)，其中 Γ_1 是以 $\overline{AB}$ 為直徑之半圓弧，Γ_2 是以 C 為圓心，且圓心角為 $\frac{\pi}{2}$ 之圓弧。已知 $\overline{AB}$ 為 20 公尺，試求此新月形區域的面積為多少平方公尺？

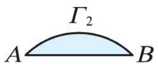


解 所求面積即為以 $\overline{AB}$ 為直徑的半圓減去 Γ_2 的弓形面積，

又 $\overline{AC}=\frac{\overline{AB}}{\sqrt{2}}=10\sqrt{2}$，

故此新月形區域的面積為



$-$


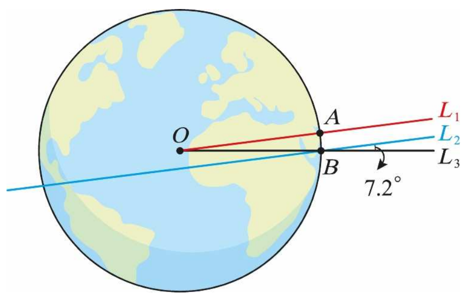
$=\frac{1}{2}\pi\times 10^2-\left(\frac{1}{4}\pi\times(10\sqrt{2})^2-\frac{1}{2}\times 10\sqrt{2}\times 10\sqrt{2}\right)$

$=50\pi-（50\pi-100）=100$（平方公尺）。

10. 設地球是一個完美的球體，中心為 O 點，而 A、B 為地球上兩個不同的城市，且劣弧 $\overset{\frown}{AB}$ 的弧長為 800 公里，如右圖。已知直線 $L_1//L_2$，且 L_2 與 L_3 的銳夾角為 7.2° ，則：

(1) 試利用平行線的同位角性質，以弳表示∠AOB。

(2) 試利用弧長公式與計算機計算地球的半徑約為多少公里？（四捨五入至整數位）



解 (1) 因為 $L_1//L_2$ 且 L_2 與 L_3 的銳夾角為 7.2°，故 $\angle AOB=7.2°=7.2\times\frac{\pi}{180}=\frac{\pi}{25}$（弳）。

(2) 因弧長 $s=r\theta$ ⇨ $800=r\times\frac{\pi}{25}$ ⇨ $r=\frac{20000}{\pi}\approx 6366$（公里）。

（註：實際上，地球半徑約在 6357 至 6378 公里之間，習題 10 這個方法是早期希臘天文學家埃拉托斯特測量地球半徑的方法。）