習題 2-4 解答

一、基本題

1. 試求下列對數的首數和尾數：（尾數四捨五入至小數點後第四位）

(1) $\log 12345$
(2) $\log 0.0004$

解

(1) $\log 12345 = \log(1.2345\times 10^4) = 4+\log 1.2345 \approx 4+0.091491094 \approx 4+0.0915$，
首數為 4，尾數為 0.0915

(2) $\log(0.0004) = \log(4\times 10^{-4}) = -4+\log 4 \approx -4+0.602059991 \approx -4+0.6021$，
首數為 -4，尾數為 0.6021

2. 物理上，普朗克常數 $\hbar = 1.054\times 10^{-34}$ 焦耳・秒，試求：

(1) $\log \hbar$ 的首數。
(2) $\log \hbar$ 的尾數。（四捨五入至小數點後第四位）

解

$\log(1.054\times 10^{-34}) = -34+\log 1.054 \approx -34+0.02284061 \approx -34+0.0228$
(1) 首數為 -34
(2) 尾數為 0.0228

3. 試利用計算機，求出以下各小題：

(1) $\log 3^{200}$ 的首數
(2) 3^{200} 是幾位數？
(3) 3^{200} 的首位數字

解

(1) $\log 3^{200} = 200\times\log 3 \approx 95.42425094 = 95+0.42425094$，
首數為 95
(2) 3^{200} 是 96 位數
(3) $\log 3^{200}$ 尾數約為 0.42，
$\log 2 \approx 0.3010 < 0.42 < \log 3 \approx 0.4771$，
故 3^{200} 首位數字為 2

4. 將 $(0.2)^{700}$ 乘開後，小數點之後在第幾位開始出現非 0 的數字？

解

$$\begin{aligned}\log(0.2)^{700} &= 700\times\log 0.2\\ &\approx 700\times(-0.698970004)\\ &\approx -489.279003\\ &= -490+0.720997,\end{aligned}$$

在小數點後第 490 位才出現不為 0 的數字

5. 某人將 10000 元存入銀行，年利率 2 %，每年計息 1 次，約定存 6 年：

(1) 若以單利計算利息，則 6 年後本利和為多少元？（四捨五入至整數位）
(2) 若以複利計算利息，則 6 年後本利和為多少元？（四捨五入至整數位）

解

(1) $10000（1+2\ \%\times 6）=10000\times 1.12=11200$（元）
(2) $10000（1+2\ \%）^6\approx 10000\times 1.126162419\approx 11262$（元）

二、進階題

6. 數學上有一個關於質數分布的定理：若 $\pi(n)$ 表示不超過 n 的質數個數，則 $\pi(n)\approx\dfrac{n}{\ln n}$，試利用此式估計小於 100000 的質數個數。（四捨五入至整數位）

解

由 $\pi(100000)\approx\dfrac{100000}{\ln 10^5}\approx\dfrac{100000}{11.51292546}$，

故 $\pi(100000)\approx 8685.889638$，即 $\pi(100000)$ 約有 8686 個質數

7. 某種黴菌有害人體，某人將此黴菌 500 個吸進體內，已知每個黴菌在人體內每隔 4 小時就會分裂成 2 個，當體內達到 1 億個黴菌時身體就會出現異常反應，在此期間則稱為潛伏期，請問此黴菌在體內的潛伏期大約有幾天？（四捨五入至整數位）

解

經過 n 次分裂會有 500×2^n 個黴菌，
$500\times 2^n\geq 100000000=10^8$，

得 $2^n\geq\dfrac{1}{500}\times 10^8=2\times 10^5$

兩邊取常用對數，
得到 $n\log 2\geq\log(2\times 10^5)=5+\log 2$，

故 $n\geq\dfrac{5+\log 2}{\log 2}\approx 17.60964047$，

因每次分裂間隔為 4 小時，
所以 18 次×4（小時／次）＝72 小時，
故潛伏期為 3 天

8. 已知 pH 值的定義為 $pH=-\log[H^+]$，其中$[H^+]$為氫離子濃度（單位：莫耳／升），現有 pH 值為 2 的溶液 100 毫升與 pH 值為 4 的溶液 100 毫升，試求兩溶液混合後的 pH 值。（四捨五入至小數點後第一位）

解　設 r_1 為 pH 值為 2 的溶液氫離子濃度，r_2 為 pH 值為 4 的溶液氫離子濃度

由 $2=-\log r_1$，

得 $\log r_1=-2$，即 $r_1=10^{-2}$，

同理，由 $4=-\log r_2$，

可得 $\log r_2=-4$，即 $r_2=10^{-4}$

100 毫升 10^{-2} 莫耳／升與 100 毫升 10^{-4} 莫耳／升溶液混合之溶液濃度為

$$\frac{10^{-2}\times 100+10^{-4}\times 100}{200}=\frac{1}{2}\times 10^{-2}+\frac{1}{2}\times 10^{-4}=5\times 10^{-3}+5\times 10^{-5}$$

$$=(5+0.05)\times 10^{-3}=5.05\times 10^{-3}$$ 莫耳／升，

因此混合後的 pH 值為

$-\log(5.05\times 10^{-3})=-(-3+\log 5.05)\approx -(-2.296708622)\approx 2.3$

9. 小毅在大學時期以就學貸款的方式來繳交學費，以致於大學畢業時共積欠銀行 100 萬元，依照當初與銀行約定畢業後以年利率 1.14 ％，每月複利計息一次。小毅畢業後立即找到一份月薪 3 萬 3 仟元的工作，小毅準備省吃儉用償還債務，扣除生活費之後每月最多只能償還 2 萬元。依此計劃，小毅至少需要多少個月才能還清此債務？（四捨五入至整數位）

解

年利率 1.14 ％ 換成每月為 $\frac{1.14\,\%}{12}=0.095\,\%$，

若每月還款 2 萬，n 個月後債務為 a_n 萬元，

$a_1=100\times1.00095-2$，

$a_2=a_1\times1.00095-2$，

⋮

$a_n=a_{n-1}\times1.00095-2$

$=\{\cdots[(100\times1.00095-2)\times1.00095-2]\times1.00095-2\times\cdots\}\times1.00095-2$

$=100\times(1.00095)^n-(2\times(1.00095)^{n-1}+\cdots+2)$

$=100\times(1.00095)^n-2\times(1+(1.00095)+\cdots+(1.00095)^{n-1})$

$=100\times(1.00095)^n-2\times\frac{(1.00095)^n-1}{1.00095-1}$，

債務還清時，則 $a_n\le0$，

故 $100\times(1.00095)^n\le2\times\frac{(1.00095)^n-1}{1.00095-1}$，

移項得 $\left(\frac{2}{1.00095}-100\right)\times(1.00095)^n\ge\frac{2}{1.00095}$，

化簡得 $(1.00095)^n\ge\frac{2105.263158}{2105.263158-100}\approx1.049868766$。

兩邊取常用對數可得 $n\log1.00095\ge\log1.049868766$，

則 $n\ge\frac{\log1.049868766}{\log1.00095}\approx51.25082515$，

故需 52 個月方能還清債務

三、挑戰題

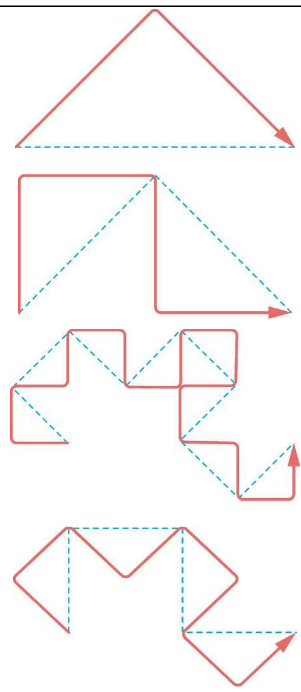
10. 龍曲線（Dragon curve）是由一條單位線段（長度為 1）開始，按下面的規則畫成的圖形：將前一代的每一條折線段都作為這一代的等腰直角三角形的斜邊，依序畫出所有直角三角形的兩股，使得所畫的相鄰兩線段永遠垂直（即直角三角形在前一代曲線的左右兩邊交替出現），所得的折線圖即為這一代的龍曲線。下圖由上到下分別為第一代、第二代、第三代、第四代曲線（淺藍色折線即為前一代曲線）。

第一代

第二代

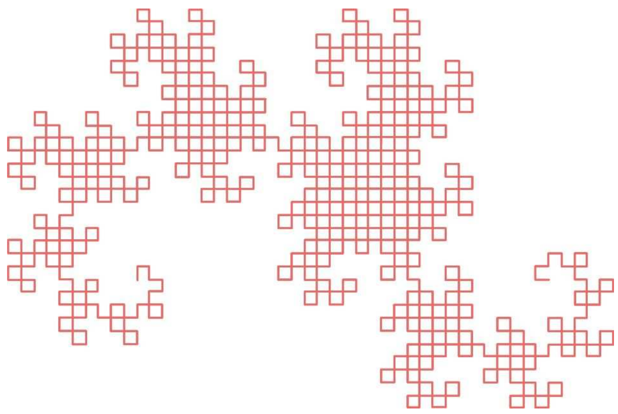
第三代

第四代



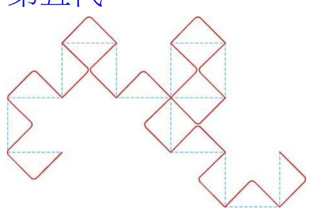
(1) 試畫出第五代的龍曲線。

(2) 如下圖為第十代的龍曲線。若第一代龍曲線的長度是 $\sqrt{2}$，請問第十代龍曲線的長度為多少？



解

(1) 第五代：



(2) 第一代折線長為 $\sqrt{2}$ ，下一代折線長度總和為其前一代的 $\sqrt{2}$ 倍，

故第一代線長為 $\sqrt{2}$，

第二代線長為 $\sqrt{2}\times\sqrt{2}$，

…，依此類推，

第 n 代線長為 $\sqrt{2}\times(\sqrt{2})^{n-1}=(\sqrt{2})^{n}$，

因此，第 10 代總長度為 $(\sqrt{2})^{10}=2^{5}=32$