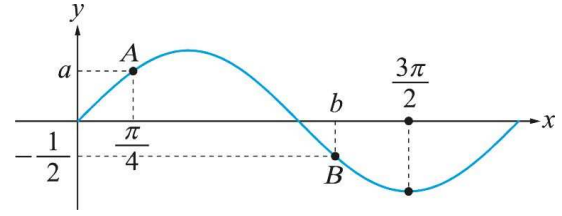


習題 1-3 解答

一、基本題

1. 右圖為  $y = \sin x$  的部分圖形，圖上點  $A\left(\frac{\pi}{4}, a\right)$ ，  
 $B\left(b, -\frac{1}{2}\right)$ ，試求  $a$  與  $b$  的值

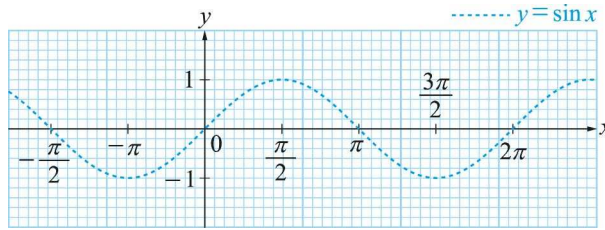


**解** 將  $A\left(\frac{\pi}{4}, a\right)$  代入  $y = \sin x$  得  $a = \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

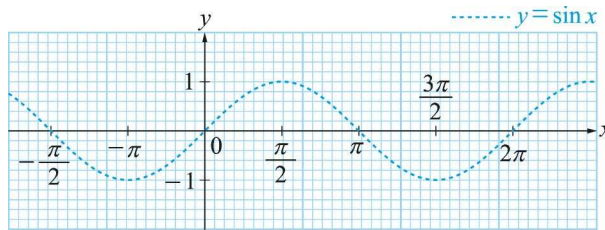
又因  $\pi < b < \frac{3\pi}{2}$ ， $B\left(b, -\frac{1}{2}\right)$  代入  $y = \sin x$  得  $-\frac{1}{2} = \sin b$ ，解得  $b = \frac{7\pi}{6}$

2. 試利用  $y = \sin x$  的圖形，繪出下列函數圖形，並求其週期、最大值與最小值

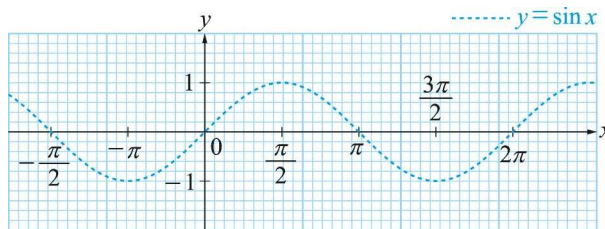
(1)  $y = 2 \sin x$



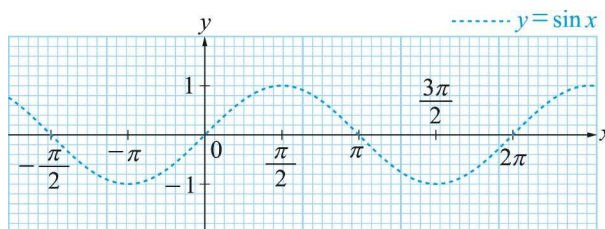
(2)  $y = \sin 2x$



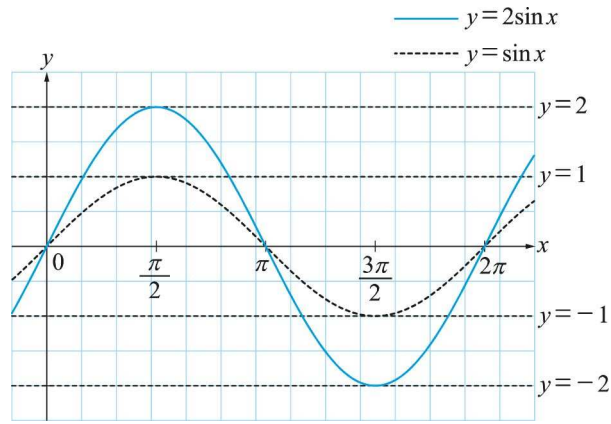
(3)  $y = \sin(-x)$



(4)  $y = \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + 1$

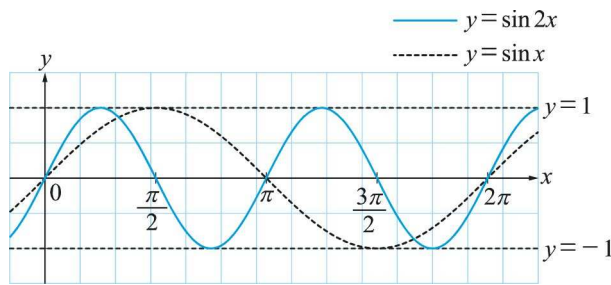


**解** (1) 將  $y = \sin x$  的圖形上每一點的  $y$  坐標都乘上 2 倍，可得下圖



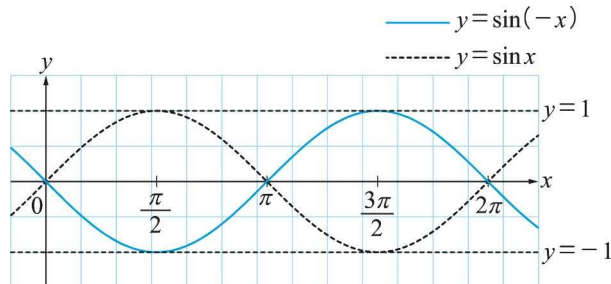
觀察圖形可得週期為  $2\pi$ ，最大值為 2，最小值為  $-2$

(2) 將  $y = \sin x$  的圖形上每一點的  $x$  坐標都乘上  $\frac{1}{2}$  倍，可得下圖



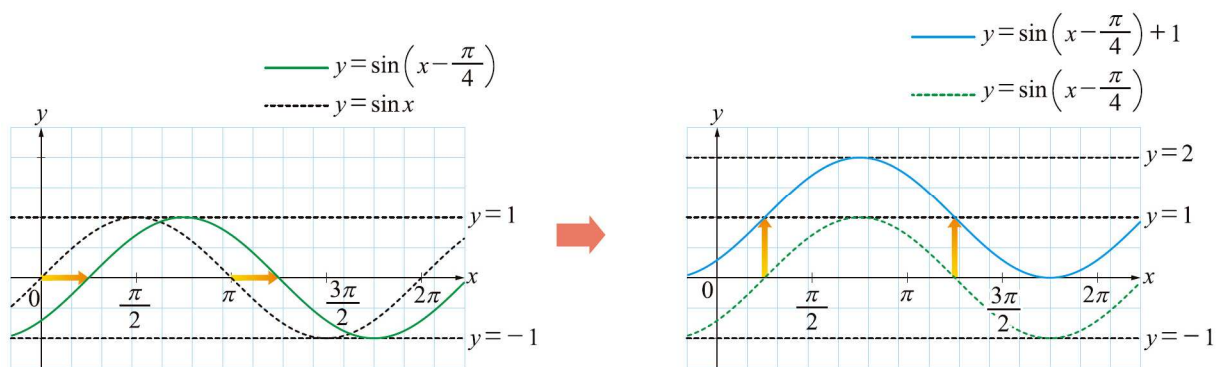
觀察圖形可得週期為  $\pi$ ，最大值為 1，最小值為  $-1$

(3)  $y = \sin(-x) = -\sin x$ ，將  $y = \sin x$  的圖形對  $x$  軸作對稱，可得下圖



觀察圖形可得週期為  $2\pi$ ，最大值為 1，最小值為  $-1$

(4) 先將  $y = \sin x$  的圖形向右平移  $\frac{\pi}{4}$  單位，再向上平移 1 單位，如下圖



觀察圖形可得週期為  $2\pi$ ，最大值為 2，最小值為 0

**例 3.** 試比較  $\cos 1$ ,  $\cos 2$ ,  $\cos 3$  的大小

**解**  $\cos 1 \approx 0.54$

$\cos 2 \approx -0.42$

$\cos 3 \approx -0.99$

故  $\cos 1 > \cos 2 > \cos 3$

4. 試求下列各函數的週期：

(1)  $y = \cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$

(2)  $y = -\tan\left(\frac{x}{3}\right)$

**解** (1) 週期為  $2\pi$

(2) 週期為  $3\pi$

5. (1) 在  $0 \leq x \leq 2\pi$  的範圍中，試解  $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$

**例 2.** (2) 在  $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$  的範圍中，試解  $\sin x = \frac{3}{5}$  (四捨五入至小數點後第三位)

**解**

(1)  $x = \frac{\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}$

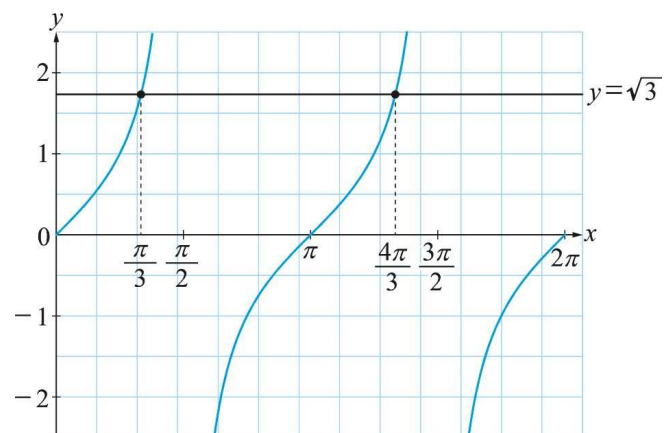
(2) 利用計算機得  $x \approx 0.643501108 \approx 0.644$

## 二、進階題

6. 在  $0 \leq x \leq 2\pi$  的範圍中，解不等式  $\tan x \geq \sqrt{3}$

**解** 如右圖

可得  $\frac{\pi}{3} \leq x < \frac{\pi}{2}, \frac{4\pi}{3} \leq x < \frac{3\pi}{2}$

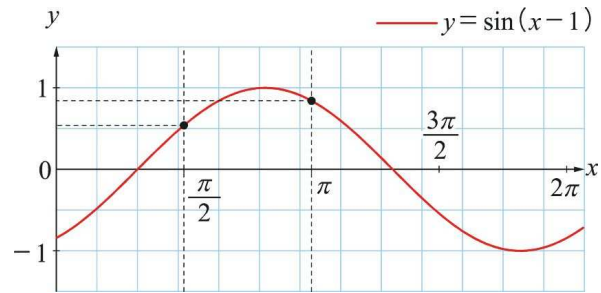


7. 試比較  $\sin\left(\frac{\pi}{2}-1\right)$  和  $\sin(\pi-1)$  的大小

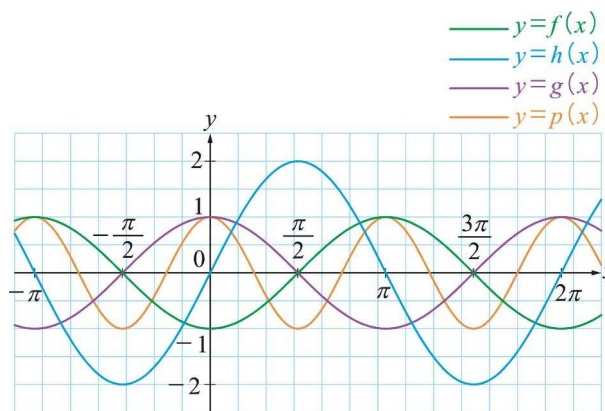
**解** 可觀察函數  $y=\sin(x-1)$  的圖形

分別與  $x=\frac{\pi}{2}$  與  $x=\pi$  的交點  $y$  坐標可得

$$\sin(\pi-1) > \sin\left(\frac{\pi}{2}-1\right)$$



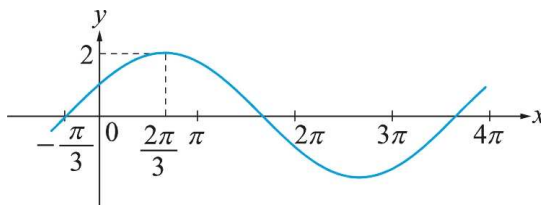
8. 試判斷下圖中，何者為  $y=2\sin x$ ,  $y=\cos 2x$ ,  $y=\sin\left(x-\frac{\pi}{2}\right)$ ?



**解**

由題圖可得  $y=2\sin x$  為  $h(x)$ ,  $y=\cos 2x$  為  $p(x)$ ,  $y=\sin\left(x-\frac{\pi}{2}\right)$  為  $f(x)$

9. 若函數  $f(x)=2\sin\left(\frac{1}{2}x+\theta\right)$  的部分圖形如下圖所示，其中  $0\leq\theta\leq 2\pi$ ，則  $\theta$  的值為何？



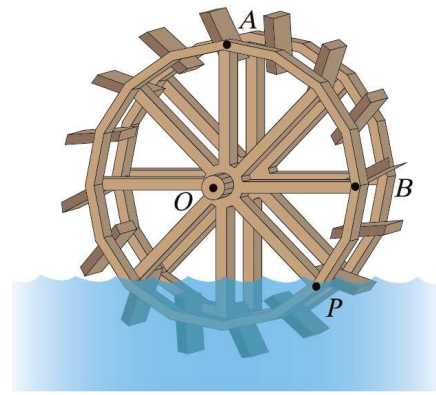
**解**

當  $x=\frac{2\pi}{3}$  時,  $y=2\sin\left(\frac{1}{2}\times\frac{2\pi}{3}+\theta\right)=2$

化簡得  $\sin\left(\frac{\pi}{3}+\theta\right)=1$ , 即  $\frac{\pi}{3}+\theta=\frac{\pi}{2}$ , 故  $\theta=\frac{\pi}{6}$

## 三、挑戰題

10. 有一半徑為 1 公尺的水車，水車圓心  $O$  點距離水面 50 公分，水車為逆時針旋轉，以  $O$  點為原點建立坐標系，最高點  $A$  點位於  $y$  軸正向，最右點  $B$  點位於  $x$  軸正向。車輪上有一點  $P$ ，在時間  $t$  秒時，其高度  $y$  公尺可用函數  $y = \sin \frac{2\pi}{120}t$  來描述，其中  $t \geq 0$ ，試問：
- (1) 水車一個小時繞幾圈？
  - (2) 從  $P$  點出發後，最快多少秒可到達最高點  $A$  處？



解

$$(1) \text{ 週期為 } \frac{2\pi}{\frac{2\pi}{120}} = 120 \text{ (秒)}$$

1 小時有 3600 秒

$$\text{故 1 小時可繞 } \frac{3600}{120} = 30 \text{ (圈)}$$

$$(2) \text{ 由 } P \text{ 點至 } A \text{ 點共旋轉 } \frac{2\pi}{3} \quad \therefore \frac{2\pi}{120}t_0 = \frac{2\pi}{3} \Rightarrow t_0 = 40$$

即 40 秒可達最高點