2-4 指數與對數函數的應用

■例題 1　首數與尾數（利用已知對數值推算）

已知 $\log 2.54 \approx 0.4048$，試求下列各數的對數：

(1) $\log 254000$

(2) $\log 0.000000254$

解 (1) $\log 254000$

$=\log(2.54\times10^5)$

$=\log 2.54+\log 10^5$

$\approx 0.4048+5$

$=5.4048$

(2) $\log 0.000000254$

$=\log(2.54\times10^{-7})$

$=\log 2.54+\log 10^{-7}$

$\approx 0.4048+(-7)$

$=-7+0.4048$

$=-6.5952$

■例題 2　首數與尾數（按計算機求對數）

使用計算機求下列各對數值的首數與尾數，尾數若有小數請四捨五入至小數點後第四位。

(1) $\log 3656570$

(2) $\log 0.00415$

解 使用計算機，按鍵如下

(1) 依序按鍵 $\boxed{3}$，$\boxed{6}$，$\boxed{5}$，$\boxed{6}$，$\boxed{5}$，$\boxed{7}$，$\boxed{0}$，$\boxed{\log}$

得 $\log 3656570 \approx 6.563073892 \approx 6.5631=6+0.5631$

首數 6，尾數 0.5631

(2) 依序按鍵 $\boxed{0}$，$\boxed{.}$，$\boxed{0}$，$\boxed{0}$，$\boxed{4}$，$\boxed{1}$，$\boxed{5}$，$\boxed{\log}$

得 $\log 0.00415 \approx -2.381951903 \approx -2.3820=-3+0.6180$

首數 -3，尾數 0.6180

■例題 3　用首數判斷整數位數

試判斷下列各數的整數部分有幾位數：

(1) 2^{1000}

(2) 2.17^{1248}

解 使用計算機，按鍵如下

(1) 因為 $\log 2^{1000}=1000\log 2$，故依序按鍵 $\boxed{1}$，$\boxed{0}$，$\boxed{0}$，$\boxed{0}$，$\boxed{\times}$，$\boxed{2}$，$\boxed{\log}$，$\boxed{=}$

得 $\log 2^{1000}\approx 301.0299957=301+0.299957$

因為首數為 301，故知 2^{1000} 的整數部分有 302 位數

(2) 因為 $\log 2.17^{1248}=1248\log 2.17$，

故依序按鍵 $\boxed{1}$，$\boxed{2}$，$\boxed{4}$，$\boxed{8}$，$\boxed{\times}$，$\boxed{2}$，$\boxed{.}$，$\boxed{1}$，$\boxed{7}$，$\boxed{\log}$，$\boxed{=}$

得 $\log 2.17^{1248}\approx 419.9017478=419+0.9017478$

因為首數為 419，故知 2.17^{1248} 的整數部分有 420 位數

■例題 4　用首數判斷純小數的第一個非零數字的位置

試判斷下列各數表為純小數時，小數點後第幾位才出現非 0 的數字：

(1) 0.23^{12}

(2) $\left(\dfrac{3}{4}\right)^{200}$

解 使用計算機，按鍵如下

(1) 因為 $\log 0.23^{12}=12\log 0.23$，故依序按鍵 $\boxed{1}$，$\boxed{2}$，$\boxed{\times}$，$\boxed{0}$，$\boxed{.}$，$\boxed{2}$，$\boxed{3}$，$\boxed{\log}$，$\boxed{=}$

得 $\log 0.23^{12}\approx -7.659265968=-8+0.340734032$

因為首數為 -8，故知 0.23^{12} 在小數點後第 8 位開始不為 0

(2) 因為 $\log\left(\dfrac{3}{4}\right)^{200}=200\log\dfrac{3}{4}$，

故依序按鍵 $\boxed{3}$，$\boxed{\div}$，$\boxed{4}$，$\boxed{=}$，$\boxed{\log}$，$\boxed{\times}$，$\boxed{2}$，$\boxed{0}$，$\boxed{0}$，$\boxed{=}$

得 $\log\left(\dfrac{3}{4}\right)^{200}\approx -24.98774732=-25+0.01225268$

因為首數為 -25，故知 $\left(\dfrac{3}{4}\right)^{200}$ 在小數點後第 25 位開始不為 0

■**例題 5　用尾數判斷最高位數字**

試判斷 2^{120} 的最高位數字

解 使用計算機，按鍵如下

因為 $\log 2^{120}=120\log 2$，故依序按鍵 $\boxed{1}$，$\boxed{2}$，$\boxed{0}$，$\boxed{\times}$，$\boxed{2}$，$\boxed{\log}$，$\boxed{=}$

得 $\log 2^{120} \approx 36.12359948=36+0.12359948$

尾數 0.12359948，因為 $1<10^{\log 0.12359948}<2$

故知 2^{120} 的最高位數字為 1

■**例題 6　指數對數在金融上的應用：複利法**

假設銀行的一年期定存利率為 1.2 %，小明打算存入 50 萬元，試分別計算以下兩種方案的本利和。

(1) 每年複利一次，為期 6 年

(2) 每個月複利一次，為期 5 年

解 (1) 本利和為 $500000(1+0.012)^6$

按計算機得 537097.4363，約 537097（元）

(2) $1.2\% \div 12=0.1\%=0.001$，5 年共 60 期

本利和為 $500000(1+0.001)^{60}$

按計算機得 530902.3566，約 530902（元）

■例題 7 用計算機估計 $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ 的值

用計算機計算 $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$：

(1) $n=10$
(2) $n=10^3$
(3) $n=10^5$
(4) $n=10^7$
(5) $n=10^9$

解 使用計算機按鍵如下：

(1) $\boxed{1}$，$\boxed{+}$，$\boxed{1}$，$\boxed{\div}$，$\boxed{1}$，$\boxed{0}$，$\boxed{=}$，$\boxed{x^y}$，$\boxed{1}$，0，$\boxed{=}$

所求為 2.59374246

(2) $\boxed{1}$，$\boxed{+}$，$\boxed{1}$，$\boxed{\div}$，$\boxed{1}$，$\boxed{0}$，$\boxed{x^y}$，$\boxed{3}$，$\boxed{=}$，$\boxed{x^y}$，$\boxed{((---}$，$\boxed{1}$，$\boxed{0}$，$\boxed{x^y}$，$\boxed{3}$，$\boxed{=}$

所求為 2.716923932

(3) $\boxed{1}$，$\boxed{+}$，$\boxed{1}$，$\boxed{\div}$，$\boxed{1}$，$\boxed{0}$，$\boxed{x^y}$，$\boxed{5}$，$\boxed{=}$，$\boxed{x^y}$，$\boxed{((---}$，$\boxed{1}$，$\boxed{0}$，$\boxed{x^y}$，$\boxed{5}$，$\boxed{=}$

所求為 2.718268237

(4) $\boxed{1}$，$\boxed{+}$，$\boxed{1}$，$\boxed{\div}$，$\boxed{1}$，$\boxed{0}$，$\boxed{x^y}$，$\boxed{7}$，$\boxed{=}$，$\boxed{x^y}$，$\boxed{((---}$，$\boxed{1}$，$\boxed{0}$，$\boxed{x^y}$，$\boxed{7}$，$\boxed{=}$

所求為 2.718281693

(5) $\boxed{1}$，$\boxed{+}$，$\boxed{1}$，$\boxed{\div}$，$\boxed{1}$，$\boxed{0}$，$\boxed{x^y}$，$\boxed{9}$，$\boxed{=}$，$\boxed{x^y}$，$\boxed{((---}$，$\boxed{1}$，$\boxed{0}$，$\boxed{x^y}$，$\boxed{9}$，$\boxed{=}$

所求為 2.718281827

■例題 8 指數對數在科學上的應用（一）半衰期（依比例衰退）

放射物的質量變為原來的一半所需的時間，稱為該物質的半衰期。鐳（Radium）是一種放射性物質，最穩定的同位素為鐳-226，半衰期為 1600 年。假設剛開始鐳的質量為 10 公克，試求：

(1) 400 年後的質量。（四捨五入至小數點後第二位）
(2) 衰變到剩下 8 公克時，需要幾年？（四捨五入至整數位）

解 (1) 因為半衰期是 1600 年，故 400 年是半衰期的 $\frac{400}{1600}=\frac{1}{4}$

因此，400 年以後，鐳的質量為 $10\times\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{4}}$

按計算機得 8.408964153，約為 8.41 克

(2) 設 n 年以後剩下 8 克，則 $10\times\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{n}{1600}}=8$

即 $\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{n}{1600}}=0.8$，兩邊取常用對數，$\frac{n}{1600}\log\left(\frac{1}{2}\right)=\log 0.8$

$\frac{n}{1600}=\frac{\log 0.8}{\log\left(\frac{1}{2}\right)}$ 得 $n\approx 515.0849518$，約 515 年

■**例題 9　指數對數在科學上的應用（二）地震規模與釋出的能量**

所謂地震規模（Magnitude），是一個用來描述地震大小的無單位實數，其大小與地震所釋放的能量有關。根據地震學家古騰堡（Gutenberg）的公式，地震所釋放的能量 E（單位：爾格，erg）與芮氏地震規模（Richter Magnitude Scale）M 的關係為：$\log E=11.8+1.5M$。試回答下列問題：

(1) 西元 2004 年 12 月 26 日印尼蘇門答臘發生芮氏規模 9.0 的地震，而 2012 年 8 月 31 日菲律賓發生芮氏規模為 7.6 的地震。試問蘇門答臘地震所釋放出的能量是菲律賓地震的幾倍？（四捨五入至整數位）

(2) 地震規模每增加 1，所釋放的能量會增加為多少倍？

（地震公式與案例資料來源：中央氣象局地震測報中心網頁）

解 (1) 設蘇門答臘地震釋放能量為 E_1，菲律賓地震釋放能量為 E_2

故得 $\log E_1=11.8+1.5\times 9.0$ ……………… ①

$\log E_2=11.8+1.5\times 7.6$ ……………… ②

由① − ②得 $\log E_1-\log E_2=1.5\times 1.4$

$$\log\left(\frac{E_1}{E_2}\right)=2.1，\frac{E_1}{E_2}=10^{2.1}\approx 125.8925412\approx 126\text{（倍）}$$

故知蘇門答臘地震所釋放的能量約為菲律賓地震釋放能量的 126 倍

〈另解〉設蘇門答臘地震釋放能量為 E_1，菲律賓地震釋放能量為 E_2

故得 $\log E_1=11.8+1.5\times 9.0$，$E_1=10^{25.3}$

$\log E_2=11.8+1.5\times 7.6$，$E_2=10^{23.2}$

$$\frac{E_1}{E_2}=10^{25.3-23.2}\approx 125.8925412\approx 126\text{（倍）}$$

(2) 設某次地震規模 m，釋放能量為 E_1；地震規模 $m+1$，釋放能量為 E_2

我們有 $\log E_1=11.8+1.5m$ ……………… ①

$\log E_2=11.8+1.5(m+1)$ ……… ②

由② − ①得 $\log E_2-\log E_1=1.5$

$$\log\left(\frac{E_2}{E_1}\right)=1.5，\frac{E_2}{E_1}=10^{1.5}\approx 31.6227766\approx 32\text{（倍）}$$

故知地震規模每增加 1，所釋放的能量會增加為 32 倍

■例題 10　指數對數在科學上的應用（三）視星等與絕對星等

天文學家用來表示星體亮暗程度的基本方式有二種：視星等（apparent magnitude）、絕對星等（absolute magnitude），其中視星等是由我們在地球上觀測到的亮度，通常以小寫英文字母 m 表示；而絕對星等則是假想在距離星體 10 秒差距（約 32.616 光年）遠的地方所觀測到的視星等，通常以大寫英文字母 M 表示。絕對星等與視星等可用如下公式轉換：

$M=m-5\log\dfrac{d}{32.616}$（$d$ 為觀測的恆星與地球的距離，單位為光年）。試問：

(1) 天狼星（Sirius）絕對星等為 1.42，視星等為 −1.46，試求天狼星到地球的距離。(四捨五入至小數點後第三位)

(2) 織女星與地球距離為 25 光年，絕對星等為 0.58。試求織女星的視星等。(四捨五入至小數點後第三位)

（資料來源：維基百科）

解 (1) 假設天狼星距離地球 s 光年

將天狼星的絕對星等 1.42 與視星等 −1.46 代入轉換公式，得

$$1.42=-1.46-5\log\frac{s}{32.616}$$

$$\Rightarrow\ 5\log\frac{s}{32.616}=-2.88$$

$$\Rightarrow\ \log\frac{s}{32.616}=-0.576$$

$$\Rightarrow\ \frac{s}{32.616}=10^{-0.576}$$

$\Rightarrow s=32.616\times10^{-0.576}\ \approx\ 8.658261501\ \approx\ 8.658$

故天狼星到地球的距離約為 8.658 光年

(2) 將已知資料代入轉換公式，得 $0.58=m-5\log\dfrac{25}{32.616}$

移項可得 $m=0.58+5\log\dfrac{25}{32.616}\approx0.00254655114\approx0.003$

故織女星視星等約為 0.003