

2-3 對數函數及其圖形

■例題 1 對數函數的基本運算

設 $f(x) = \log_2 x$ ，試求下列各函數值：(若有小數請四捨五入至小數點後第二位)

(1) $f(1)$

(2) $f(4)$

(3) $f(10)$

(4) $f\left(\frac{1}{3}\right)$

(5) $f(0.02)$

解 (1) $f(1) = \log_2 1 = 0$

(2) $f(4) = \log_2 4 = 2$

(3) $f(10) = \log_2 10 = \frac{\log 10}{\log 2} \approx 3.321928095 \approx 3.32$

(4) $f\left(\frac{1}{3}\right) = \log_2 \frac{1}{3} = \frac{\log \frac{1}{3}}{\log 2} \approx -1.584962501 \approx -1.58$

(5) $f(0.02) = \log_2 0.02 = \frac{\log 0.02}{\log 2} \approx -5.64385619 \approx -5.64$

■例題 2 對數比較大小

試比較下列各對數的大小：

(1) $a = \log_2 7$ ， $b = \log_2 1$ ， $c = \log_2 \sqrt{2}$ ， $d = \log_2 \frac{1}{4}$

(2) $a = \log_2 \frac{1}{4}$ ， $b = \log_2 6$ ， $c = \log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{4}$ ， $d = \log_{\sqrt{2}} 3$

解 (1) 因為 $\log_2 x$ 為嚴格遞增函數，

且 $\frac{1}{4} < 1 < \sqrt{2} < 7$

故 $\log_2 \frac{1}{4} < \log_2 1 < \log_2 \sqrt{2} < \log_2 7$

即 $d < b < c < a$

(2) $a = \log_2 \frac{1}{4}$

$b = \log_2 6$

$c = \log_{2^{-1}} 4^{-1} = \frac{\log 4^{-1}}{\log 2^{-1}} = \frac{-1 \times \log 4}{-1 \times \log 2} = \log_2 4$

$d = \log_{2^{\frac{1}{2}}} 3 = \frac{\log 3}{\log 2^{\frac{1}{2}}} = \frac{\log 3}{\frac{1}{2} \times \log 2}$

$= \frac{2 \log 3}{\log 2} = \frac{\log 3^2}{\log 2} = \log_2 9$

同理，因為 $\log_2 x$ 為嚴格遞增函數，

且 $\frac{1}{4} < 4 < 6 < 9$

故得 $a < c < b < d$

■例題 3 使對數式有意義的 x 範圍

試求 x 的範圍，使下列對數式有意義：

(1) $\log(8-x)$ 。

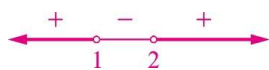
(2) $\log(x^2-3x+2)$

解 (1) $8-x > 0$

$\therefore x < 8$

(2) $x^2-3x+2 > 0$

$\Leftrightarrow (x-1)(x-2) > 0$



$\therefore x < 1$ 或 $x > 2$

■例題 4 對數方程式 (一)

試解下列對數方程式：

(1) $\log_2(x+3) = 3$

(2) $2 \log(x-1) = \log 25$

解 (1) 真數 $x+3 > 0 \therefore x > -3$

解 $x+3 = 2^3 = 8$

得 $x = 5$

(2) ① 真數 $x-1 > 0$ 得 $x > 1$

② 解方程式得

$\log(x-1)^2 = \log 25$

$\Leftrightarrow (x-1)^2 = 25$

$\Leftrightarrow x-1 = \pm 5$

$\Leftrightarrow x = 6$ 或 -4

由①、②得 $x = 6$

■例題 5 對數方程式 (二)

解下列對數方程式：

$$(1) \log_3 (x+4) + \log_3 (x-4) = 2$$

$$(2) \log_5 (3x+5) + \log_5 (x+5) = 2$$

解 (1) ① 真數 $x+4 > 0$, $x-4 > 0$

$$\Rightarrow x > -4, x > 4$$

$$\therefore x > 4$$

② 由 $2 = \log_3 9$ 可將方程式化為

$$\frac{\log(x+4)}{\log 3} + \frac{\log(x-4)}{\log 3} = \frac{\log 9}{\log 3}$$

$$\Rightarrow \frac{\log(x+4)(x-4)}{\log 3} = \frac{\log 9}{\log 3}$$

$$\Rightarrow \log(x+4)(x-4) = \log 9$$

$$\Rightarrow (x+4)(x-4) = 9$$

$$\Rightarrow x^2 - 16 = 9$$

$$\Rightarrow x^2 = 25$$

$$\Rightarrow x = \pm 5$$

由①、②得 $x = 5$

(2) ① 真數 $3x+5 > 0$, $x+5 > 0$

$$\Rightarrow x > -\frac{5}{3}, x > -5$$

$$\therefore x > -\frac{5}{3}$$

② 由 $2 = \log_5 25$ 可將方程式化為

$$\frac{\log(3x+5)}{\log 5} + \frac{\log(x+5)}{\log 5} = \frac{\log 25}{\log 5}$$

$$\Rightarrow \frac{\log(3x+5)(x+5)}{\log 5} = \frac{\log 25}{\log 5}$$

$$\Rightarrow \log(3x+5)(x+5) = \log 25$$

$$\Rightarrow (3x+5)(x+5) = 25$$

$$\Rightarrow 3x^2 + 20x + 25 = 25$$

$$\Rightarrow 3x^2 + 20x = 0$$

$$\Rightarrow x(3x+20) = 0$$

$$\Rightarrow x = 0 \text{ 或 } -\frac{20}{3}$$

由①、②得 $x = 0$

例題 6 用對數解指數方程式

解下列指數方程式，並求 x 的近似值（四捨五入至小數點後第二位）。

(1) $5^{x-3} = 32$

(2) $4^{3x-11} = 108$

解 (1) 兩邊取常用對數，得

$$\log 5^{x-3} = \log 32$$

$$\Leftrightarrow (x-3) \log 5 = \log 32$$

$$\Leftrightarrow x-3 = \frac{\log 32}{\log 5}$$

$$\Leftrightarrow x = 3 + \frac{\log 32}{\log 5} \approx 5.15338279 \approx 5.15$$

(2) 兩邊取常用對數，得

$$\log 4^{3x-11} = \log 108$$

$$\Leftrightarrow (3x-11) \log 4 = \log 108$$

$$\Leftrightarrow 3x-11 = \frac{\log 108}{\log 4}$$

$$\Leftrightarrow 3x \approx 11 + 3.377443751 = 14.377443751$$

$$\Leftrightarrow x \approx 4.79248125 \approx 4.79$$

■例題 7 對數不等式 (一)

試解下列對數不等式：

(1) $\log_3 x < 3$

(2) $\log_{\frac{1}{3}} 2x > 2$

解 (1) ① 真數 $x > 0$

② $\log_3 x < 3$

$$\Rightarrow \log_3 x < \log_3 3^3$$

$$\Rightarrow x < 27$$

由①、②得 $0 < x < 27$

(2) ① 真數 $2x > 0$

$$\therefore x > 0$$

② $\log_{\frac{1}{3}} 2x > 2$

$$\Rightarrow \log_{\frac{1}{3}} 2x > \log_{\frac{1}{3}} \left(\frac{1}{3}\right)^2$$

$$\Rightarrow \frac{\log 2x}{\log \frac{1}{3}} > \frac{\log \frac{1}{9}}{\log \frac{1}{3}}$$

$$\Rightarrow \frac{\log 2x}{-\log 3} > \frac{\log \frac{1}{9}}{-\log 3}$$

$$\Rightarrow \log 2x < \log \frac{1}{9}$$

$$\Rightarrow 2x < \frac{1}{9}$$

$$\Rightarrow x < \frac{1}{18}$$

由①、②得 $0 < x < \frac{1}{18}$

■例題 8 對數不等式 (二)

試解下列對數不等式：

(1) $\log_3 (x+1) \leq \log_9 (5x-1)$

(2) $\log_2 (x+4) + \log_2 (x-2) \leq 4$

解 (1) ① 真數 $x+1 > 0$ 且 $5x-1 > 0$

$$\Rightarrow x > -1 \text{ 且 } x > \frac{1}{5}$$

$$\therefore x > \frac{1}{5}$$

② $\log_3 (x+1) \leq \log_9 (5x-1)$

$$\Rightarrow \log_9 (x+1)^2 \leq \log_9 (5x-1)$$

$$\Rightarrow \frac{\log(x+1)^2}{\log 9} \leq \frac{\log(5x-1)}{\log 9}$$

$$\Rightarrow (x+1)^2 \leq 5x-1$$

$$\Rightarrow x^2 + 2x + 1 - 5x + 1 \leq 0$$

$$\Rightarrow x^2 - 3x + 2 \leq 0$$

$$\Rightarrow (x-1)(x-2) \leq 0$$

$$\Rightarrow 1 \leq x \leq 2$$

由①、②得 $1 \leq x \leq 2$

(2) ① 真數 $x+4 > 0$ 且 $x-2 > 0$

$$\Rightarrow x > -4 \text{ 且 } x > 2$$

$$\therefore x > 2$$

② $\log_2 (x+4) + \log_2 (x-2) \leq 4$

$$\Rightarrow \log_2 (x+4)(x-2) \leq \log_2 2^4$$

$$\Rightarrow (x+4)(x-2) \leq 2^4$$

$$\Rightarrow x^2 + 2x - 8 \leq 16$$

$$\Rightarrow x^2 + 2x - 24 \leq 0$$

$$\Rightarrow (x+6)(x-4) \leq 0$$

$$\Rightarrow -6 \leq x \leq 4$$

由①、②得 $2 < x \leq 4$