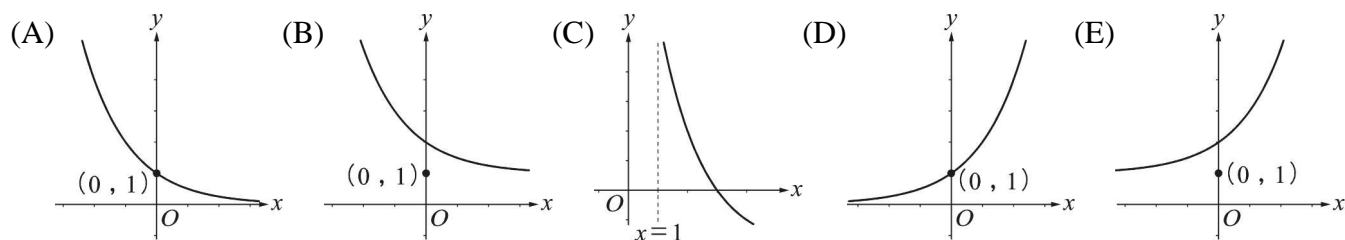


第 2 章 綜合演練

一、單選題

1. 已知指數函數 $y=0.5^x+1$ ，則下列哪個選項可以是此函數的圖形？



解 因為底數小於 1，圖形會逐漸下降，因此刪去(D)(E)

令 $x=0$ 代入得 $y=2$ ，故刪去(A)

對數函數的定義域為 \mathbb{R} ，即 x 可以是任意實數，故刪去(C)

(B)的定義域是 \mathbb{R} ，且 y 截距大於 1，可以是 $y=0.5^x+1$ 的圖形

故選(B)

2. 下列各選項中，有一個對數的尾數與其他選項不同，請選出這個選項：

(A) $\log 4131$

(B) $\log 0.00004131$

(C) $\log 4131000$

(D) $\log (4.131 \times 10^{12})$

(E) $\log 4.131^{10}$

解 (A) $\log 4131 = 3 + \log 4.131 \approx 3 + 0.616055195$

(B) $\log 0.00004131 = -5 + \log 4.131$

(C) $\log 4131000 = 6 + \log 4.131$

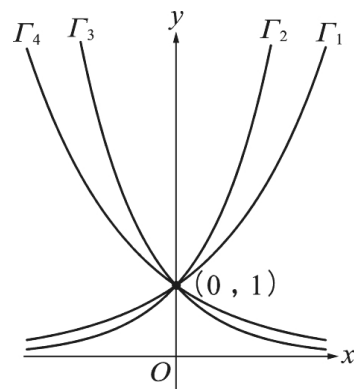
(D) $\log (4.131 \times 10^{12}) = 12 + \log 4.131$

(E) $\log 4.131^{10} = 10 \log 4.131 \approx 6.16055195 = 6 + 0.16055195$

故選(E)

二、多選題

3. 右圖 4 個曲線 Γ_1 、 Γ_2 、 Γ_3 、 Γ_4 分別為函數 $y=a^x$ 、 $y=b^x$ 、 $y=c^x$ 、 $y=d^x$ 的圖形，請選出正確的選項：



- (A) $a > 1$
- (B) $c > 1$
- (C) $a < b$
- (D) $b > c$
- (E) $c > d$

解 (A) ○：因為 Γ_1 由左而右上升，底數大於 1，所以 $a > 1$
 (B) ×：因為 Γ_3 由左而右下降，底數小於 1，所以 $c < 1$
 (C) ○：因為 Γ_2 上升的速度比 Γ_1 快，所以 $b > a$ ，即 $a < b$
 (D) ○：由(A)(C)， $b > 1$ ，由(B)， $c < 1$ ，所以 $b > c$
 (E) ×：因為 Γ_3 下降的速度比 Γ_4 快，所以 $c < d$
 故選(A)(C)(D)

4. 對數式的底數、真數不滿足特定條件時，我們稱它無意義，請選出無意義的選項：

- (A) $\log_5 (-2)$
- (B) $\log_2 \sqrt{5}$
- (C) $\log_{(-2)} 2$
- (D) $\log_1 7$
- (E) $\log_{\sqrt{3}-1} 2$

解 (A) $\log_5 (-2)$ ：真數不可小於 0，故無意義
 (C) $\log_{(-2)} 2$ ：底數不可小於 0，故無意義
 (D) $\log_1 7$ ：底數不可等於 1，故無意義
 其他(B)、(E)符合對數的定義
 故選(A)(C)(D)

三、填充題

5. 用科學記號表示 12^{365} ，係數部分取五位有效數字，可得_____

解 先取對數，按計算機得 $\log 12^{365} = 365 \log 12 \approx 393.9011548$

$$\text{故知 } 12^{365} = 10^{0.9011548 \times 10^{393}}$$

$$\text{其中 } 10^{0.9011548} \approx 7.964431842 \approx 7.9644$$

$$\text{故 } 12^{365} \approx 7.9644 \times 10^{393}$$

6. (1) 解指數方程式 $3^{10^x} = 10^4$ ，得 $x = \underline{\hspace{2cm}}$ 。(四捨五入至小數點後第二位)

(2) 解對數方程式 $\log x + \log(x+3) = 1$ ，得 $x = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

解 (1) 兩邊取常用對數，得 $10^x \log 3 = 4$

$$\Rightarrow 10^x = \frac{4}{\log 3}$$

$$\text{兩邊取常用對數，得 } x = \log \frac{4}{\log 3} \approx 0.923431227 \approx 0.92$$

(2) ① 真數大於 0

因此， $x > 0$ 且 $x+3 > 0$ ，故得 $x > 0$

② 化簡方程式，得 $\log x(x+3) = 1$

$$\text{故 } x(x+3) = 10, \text{ 展開整理得 } x^2 + 3x = 10$$

$$\Rightarrow x^2 + 3x - 10 = 0$$

$$\Rightarrow (x+5)(x-2) = 0$$

故得 $x = -5$ 或 2

由①、②得 $x = 2$

7. 蒲福風級 (Beaufort scale) 是由英國海軍上將蒲福 (Francis Beaufort) 於 1805 年發明，用風力等級來表示風的強弱程度。經過多次修正，目前使用的經驗關係式為 $V = 0.836 \times B^{\frac{3}{2}}$ ，其中 B 為蒲福風級， V 為風速 (公尺/秒)。某次颱風來襲，氣象局預測海上風力可達 10 級 (稱為狂風 storm)，則利用上述經驗關係式推算，風速可達_____公尺/秒。(四捨五入至小數點後第一位) (資料來源：交通部中央氣象局)

解 由經驗關係式得 $V = 0.836 \times B^{\frac{3}{2}} = 0.836 \times 10^{\frac{3}{2}} \approx 26.43664124 \approx 26.4$ (公尺/秒)

8. 初入社會的小倫，每月薪水 30000 元，由於表現優異，公司每滿一年就調高待遇一次，5 年後已達每月 36000 元。假設每年調薪的比率都相同，則這個比率為_____%。(四捨五入至小數點後第一位)

解 設每年調薪的比率是 r

$$\text{則 } 30000 (1+r)^5 = 36000$$

$$\text{兩邊除以 } 30000, \text{ 得 } (1+r)^5 = 1.2$$

$$\text{兩邊取常用對數, } 5 \log(1+r) = \log 1.2$$

$$\Rightarrow \log(1+r) = \frac{\log 1.2}{5}$$

$$\Rightarrow 1+r = 10^{\frac{\log 1.2}{5}} \approx 1.037137289 \approx 1.037$$

$$\text{得 } r \approx 0.037 = 3.7\%$$

9. 當溶液的氫離子濃度為 r 莫耳/升時，此溶液的 pH 值為 $-\log r$ 。假設有一杯酸性溶液 pH 值為 3.2，則此溶液的氫離子濃度為_____莫耳/升。(以科學記號表示的係數部分取二位有效數字)

解 設此氫離子濃度為 r 莫耳/升

則由已知條件知 $-\log r = 3.2$

$$\text{得 } \log r = -3.2 \Rightarrow r = 10^{-3.2} = 10^{-4+0.8} = 10^{0.8} \times 10^{-4}$$

按計算機可得 $10^{0.8} \approx 6.309573445 \approx 6.3$

故知此溶液的氫離子濃度為 6.3×10^{-4} 莫耳/升

10. (1) 假設服用某種藥物以後，每 8 小時身體可以代謝掉三分之一，則服用此藥物 120 毫克以後，經過_____小時體內的藥物殘留量才會少於 20 毫克。(四捨五入至小數點後第一位)
- (2) 碳-14 是碳元素的一種同位素，半衰期約為 5700 年。通常生物體內的碳-14 含量與大氣相同，但生命停止後就開始衰減，因此，科學家檢測古生物的碳-14 相對於正常含量的比例，就可以推算此古生物的年代。假設某人類學家挖出一個人類的頭蓋骨，其碳-14 含量相對於正常含量為 12%，則據此可以推算其年代距今約為_____年。(四捨五入至百位數)

解 (1) 每 8 小時身體可以代謝掉三分之一，所以殘留三分之二

$$\text{設經過 } t \text{ 小時，令 } 120 \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{t}{8}} < 20 \Rightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{t}{8}} < \frac{1}{6}$$

$$\text{兩邊取常用對數，} \frac{t}{8} \log \left(\frac{2}{3}\right) < \log \frac{1}{6} \Rightarrow t > 8 \times \frac{\log \frac{1}{6}}{\log \frac{2}{3}}$$

$$\left(\text{因為 } \log \left(\frac{2}{3}\right) < 0, \text{ 所以移項時“<”要改為“>} \right)$$

$$\text{即 } t > 35.35218066 \approx 35.4 \text{ (小時)}$$

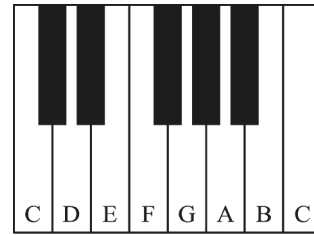
$$(2) \text{ 設年代距今 } x \text{ 年，則 } \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{x}{5700}} = \frac{12}{100}$$

$$\text{兩邊取常用對數，得 } \frac{x}{5700} \log \frac{1}{2} = \log \frac{3}{25}$$

$$x = 5700 \times \frac{\log \frac{3}{25}}{\log \frac{1}{2}} \approx 17435.69403 \approx 17400 \text{ (年)}$$

四、計算題 (每題 16 分, 共 32 分)

11. 在音樂裡, 由 Do 到 Do (即 Do、Re、Mi、Fa、Sol、La、Si、Do) 稱為八度音程。如果把經過的半音也算進來, 共有 12 個音階, 我們稱為一組八度。其中較高音的 Do, 頻率恰為較低音 Do 的 2 倍。以鋼琴為例, 一組八度含 7 個白鍵與 5 個黑鍵。音樂史上, 為了解決一些問題, 規定由較低音往較高音上升時, 相鄰兩個音階的頻率保持固定的比率, 這就是「十二平均律」。試問:



- (1) 相鄰兩音階的頻率比為多少? 用小數表示為多少? (四捨五入至小數點後第二位)
- (2) 標準 A 音 (唱 La) 頻率是 440 Hz, 試求升高 2 個半音的 B 音 (唱 Si 或 Ti) 的頻率。(四捨五入至整數位)

解 (1) 設較低的 Do 頻率為 f , 相鄰兩個半音頻率變為 r 倍
 因為較高音的 Do 與較低音 Do 相差 12 個半音
 所以 $f \times r^{12} = 2f$, 得 $r^{12} = 2$
 故得 $r = \sqrt[12]{2} \approx 1.059463094 \approx 1.06$

(2) B 音的頻率為 $440 \times (\sqrt[12]{2})^2 \approx 493.8833013 \approx 494$ (Hz)

12. 日常生活裡, 我們常用分貝 (dB) 數的大小來描述聲音的強度 I (單位: 瓦特/平方公尺, W/m^2), 它們之間的關係為 $\text{dB}(I) = 10 \times \log \frac{I}{I_0}$, 其中 I_0 是一個定值。已知棒球場上啦啦隊用的汽笛獨鳴的噪音為 72 分貝, 試回答下列問題:

- (1) 假設定值 $I_0 = 10^{-12} \text{ W}/\text{m}^2$, 試求這種汽笛的聲音強度。(以科學記號表示, 係數部分取三位有效數字)
- (2) 如果 100 支這種汽笛合鳴, 噪音可達多少分貝?

解 (1) 假設 72 分貝的聲音強度為 I

$$\text{由公式, } 10 \times \log \frac{I}{I_0} = 72 \Rightarrow \log \frac{I}{I_0} = 7.2$$

$$\Rightarrow \frac{I}{I_0} = 10^{7.2} \Rightarrow I = I_0 \times 10^{7.2} = 10^{-12} \times 10^{7.2} = 10^{-4.8} = 10^{0.2} \times 10^{-5}$$

$$\text{按計算機得 } I \approx 1.584893192 \times 10^{-5} \approx 1.58 \times 10^{-5} (\text{W}/\text{m}^2)$$

(2) 由(1), $I = I_0 \times 10^{7.2}$ 得 $100I = 100 \times I_0 \times 10^{7.2}$

故 100 支汽笛的分貝數為

$$\begin{aligned} \text{dB}(100I) &= 10 \times \log \frac{100I}{I_0} \\ &= 10 \times \log \frac{100 \times I_0 \times 10^{7.2}}{I_0} \\ &= 10(7.2 + \log 100) \\ &= 92 (\text{分貝}) \end{aligned}$$