1-4 正餘弦函數的疊合

重點整理

■ 正餘弦函數的疊合

設 a，b 是不全為 0 的實數，則 $a\sin x+b\cos x=\sqrt{a^2+b^2}\sin(x+\theta)$，

其中 θ 滿足 $\cos\theta=\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$，$\sin\theta=\dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$。

例：$3\sin x+4\cos x=5\sin(x+\theta)$，其中 θ 滿足 $\cos\theta=\dfrac{3}{5}$，$\sin\theta=\dfrac{4}{5}$。

例：$5\sin x+12\cos x=13\sin(x+\theta)$，其中 θ 滿足 $\cos\theta=\dfrac{5}{13}$，$\sin\theta=\dfrac{12}{13}$。

■例題 1　將正餘弦函數疊合成正弦曲線

將下列函數疊合成正弦曲線的形式，即 $r\sin(x+\theta)$，其中 $r>0$，$-\pi<\theta<\pi$：

(1) $y=\sin x+\sqrt{3}\cos x$

(2) $y=3\sin x-4\cos x$

解 (1) $y=\sin x+\sqrt{3}\cos x=2\left(\dfrac{1}{2}\sin x+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos x\right)$

$$=2\left(\cos\frac{\pi}{3}\sin x+\sin\frac{\pi}{3}\cos x\right)=2\left(\sin x\cos\frac{\pi}{3}+\cos x\sin\frac{\pi}{3}\right)$$

$$=2\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$$

(2) $y=3\sin x-4\cos x$

$$=5\left(\frac{3}{5}\sin x-\frac{4}{5}\cos x\right)=5\left(\sin x\cdot\frac{3}{5}-\cos x\cdot\frac{4}{5}\right)$$

$=5\sin(x-\phi)$，其中 $\cos\phi=\dfrac{3}{5}$，$\sin\phi=\dfrac{4}{5}$

■例題 2　將正餘弦函數疊合成餘弦曲線

將下列函數疊合成餘弦曲線的形式，即 $r\cos(x+\theta)$，其中 $r>0$，$-\pi<\theta<\pi$：

(1)　$y=\sin x+\cos x$

(2)　$y=4\sin x-3\cos x$

解 (1) $y=\sin x+\cos x=\sqrt{2}\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\sin x+\dfrac{1}{\sqrt{2}}\cos x\right)$

$=\sqrt{2}\left(\sin\dfrac{\pi}{4}\sin x+\cos\dfrac{\pi}{4}\cos x\right)=\sqrt{2}\left(\cos x\cos\dfrac{\pi}{4}+\sin x\sin\dfrac{\pi}{4}\right)$

$=\sqrt{2}\cos\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)$

(2) $y=4\sin x-3\cos x=5\left(\dfrac{4}{5}\sin x-\dfrac{3}{5}\cos x\right)$

$=5(\sin\phi\sin x-\cos\phi\cos x)=-5(\cos x\cos\phi-\sin x\sin\phi)$

$=-5\cos(x+\phi)$，其中 $\sin\phi=\dfrac{4}{5}$，$\cos\phi=\dfrac{3}{5}$

■例題 3　正餘弦函數疊合求最大值與最小值（一）

(1) 將函數 $y=\sin x+\sqrt{3}\cos x+3$ 疊合成正弦曲線的形式，即 $r\sin(x+\theta)$，其中 $r>0$，$-\pi<\theta<\pi$

(2) 在 $0\le x\le 2\pi$ 範圍內，求此函數的最大值，並寫出此時的 x 值

(3) 在 $0\le x\le 2\pi$ 範圍內，求此函數的最小值，並寫出此時的 x 值

解 (1) $y=2\left(\dfrac{1}{2}\sin x+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos x\right)+3$

$=2\sin\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right)+3$

(2) 令 $\theta=x+\dfrac{\pi}{3}$，由題意 $\dfrac{\pi}{3}\le\theta\le\dfrac{7\pi}{3}$，

$y=2\sin\theta+3$

當 $\theta=\dfrac{\pi}{2}$ 時，y 有最大值 $2+3=5$

此時 $x=\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{\pi}{6}$

(3) $\theta=\dfrac{3\pi}{2}$ 時，y 有最小值 $-2+3=1$

此時 $x=\dfrac{3\pi}{2}-\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{7\pi}{6}$

■例題 4　正餘弦函數疊合求最大值與最小值（二）

(1) 將函數 $y=2\sin\left(\dfrac{\pi}{6}-x\right)-2\cos x+3$ 疊合成正弦曲線的形式，即 $r\sin(x+\theta)$，其中 $r>0$，$-\pi<\theta<\pi$

(2) 在 $0\le x\le 2\pi$ 範圍內，求此函數的最大值，並寫出此時的 x 值

(3) 在 $0\le x\le 2\pi$ 範圍內，求此函數的最小值，並寫出此時的 x 值

解 (1) $y=2\left(\dfrac{1}{2}\cos x-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin x\right)-2\cos x+3$

$=-\sqrt{3}\sin x-\cos x+3$

$=-(\sqrt{3}\sin x+\cos x)+3$

$=-2\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin x+\dfrac{1}{2}\cos x\right)+3$

$=-2\sin\left(x+\dfrac{\pi}{6}\right)+3$

(2) 令 $\theta=x+\dfrac{\pi}{6}$，由題意，$\dfrac{\pi}{6}\le\theta\le\dfrac{13\pi}{6}$

$y=-2\sin\theta+3$

$\sin\theta=-1$ 時，y 有最大值 5

此時 $\theta=\dfrac{3\pi}{2}$，得 $x=\dfrac{4\pi}{3}$

(3) $\sin\theta=1$ 時，y 有最小值 1

此時 $\theta=\dfrac{\pi}{2}$，得 $x=\dfrac{\pi}{3}$

■例題 5　正餘弦函數疊合解方程式

在 $0\le x\le 2\pi$ 範圍內，解方程式 $\cos x+\sqrt{3}\sin x=1$

解 令 $y=\sqrt{3}\sin x+\cos x$

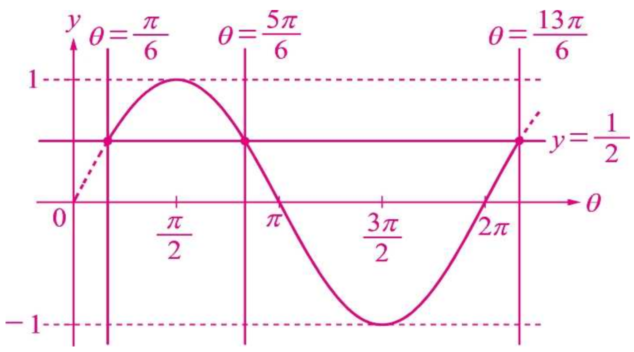
$=2\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin x+\dfrac{1}{2}\cos x\right)$

$=2\sin\left(x+\dfrac{\pi}{6}\right)$

令 $\theta=x+\dfrac{\pi}{6}$，由題意，$\dfrac{\pi}{6}\le\theta\le\dfrac{13\pi}{6}$，

解 $2\sin\theta=1$，作 $\begin{cases} y=\sin\theta \\ y=\dfrac{1}{2}\end{cases}$ 圖形如右

得 $\theta=\dfrac{\pi}{6}$ 或 $\dfrac{5\pi}{6}$ 或 $\dfrac{13\pi}{6}$，此時 $x=0$ 或 $\dfrac{2\pi}{3}$ 或 2π



■例題 6　正餘弦函數疊合解不等式

在 $0 \le x \le 2\pi$ 範圍內，試求不等式 $\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)+\cos\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)\le 0$ 的解

解 令 $y=\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)+\cos\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)$

$$=\sin x\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}+\cos x\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}+\cos x\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}+\sin x\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$=\sqrt{2}\,(\sin x+\cos x)$$

$$=\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\sin x+\frac{1}{\sqrt{2}}\cos x\right)$$

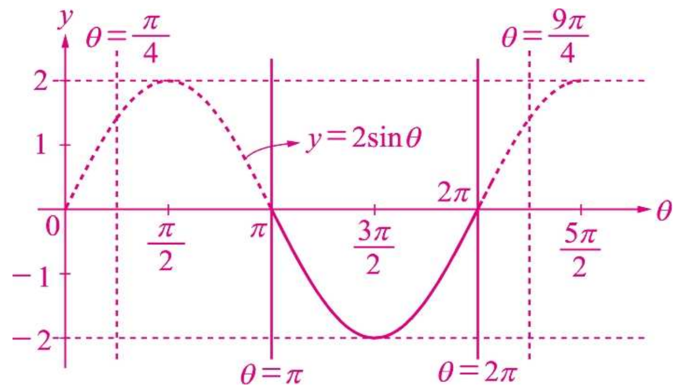
$$=2\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$$

令 $\theta=x+\dfrac{\pi}{4}$，由題意 $\dfrac{\pi}{4}\le\theta\le\dfrac{9\pi}{4}$，$y=2\sin\theta$

當 $\pi\le\ \theta\le 2\pi$ 時，$2\sin\theta\le 0$

即 $\pi\le x+\dfrac{\pi}{4}\le 2\pi$

故得 $\dfrac{3\pi}{4}\le x\le\dfrac{7\pi}{4}$



■例題 7　應用問題

兩個同頻率交流電的電流函數分別為 $i_1=f_1(t)=\sin\left(\omega t+\dfrac{\pi}{3}\right)$，$i_2=f_2(t)=\sin\left(\omega t-\dfrac{\pi}{3}\right)$，

試求兩電流函數疊加之後的總電流函數

解 $i_1+i_2=f_1(t)+f_2(t)$

$$=\sin\left(\omega t+\frac{\pi}{3}\right)+\sin\left(\omega t-\frac{\pi}{3}\right)$$

$$=\sin(\omega t)\cdot\frac{1}{2}+\cos(\omega t)\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}+\sin(\omega t)\cdot\frac{1}{2}-\cos(\omega t)\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$=\sin(\omega t)$$