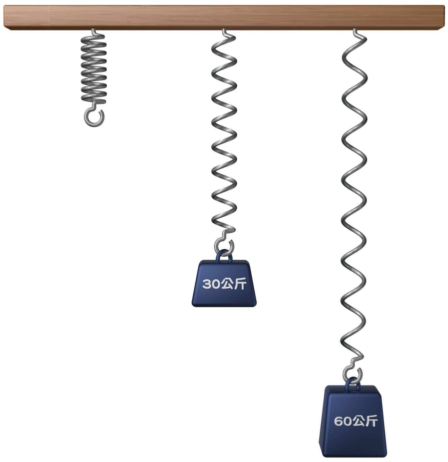
第 3 章　綜合演練詳解

1. 物理學的虎克定律說，當彈簧掛上重物時，在彈性限度內彈簧的伸長量會與彈簧的受力成一次函數的關係。現在有一條彈簧，在彈性限度內掛上 30 公斤與 60 公斤的重物後，彈簧長度分別為 60 公分與 100 公分。試問在彈性限度內若將 42 公斤的重物掛上彈簧後，彈簧長度應為多少公分。



解〔解法一〕

在彈性限度內彈簧的伸長量與所掛物體的重量成正比

假設在彈簧上掛一個重量為 x 的物體，

則彈簧的長度為 $f(x)=ax+b$

由題意可知，$f(30)=60$，$f(60)=100$，

得 $\begin{cases}30a+b=60，\\60a+b=100，\end{cases}$　解得 $a=\dfrac{4}{3}$，$b=20$

因此 $f(x)=\dfrac{4}{3}x+20$

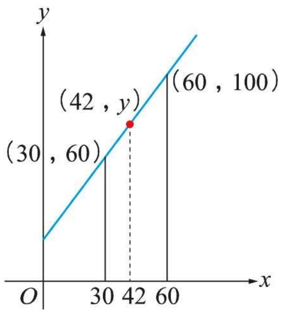
則當 $x=42$，$f(42)=\dfrac{4}{3}\times 42+20=76$（公分）

〔解法二〕

假設彈簧掛上 42 公斤重物時長度為 y 公分，

則 $\dfrac{42-30}{60-30}=\dfrac{y-60}{100-60}$，得 $\dfrac{2}{5}=\dfrac{y-60}{40}$，

因此 $y=76$（公分）



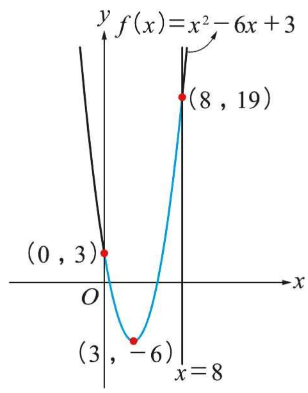
2. 令多項式 $f(x)=(x^2-2x+a)(ax^2+x+1)$，分別回答下列問題：
(1) 若 $f(x)$ 的三次項係數為 0，試求 a 值
(2) 若 $x+1$ 為 $f(x)$ 的因式，試求 a 值

解 $f(x)=(x^2-2x+a)(ax^2+x+1)$
(1) $f(x)$ 的 x^3 項為 $x^3-2ax^3=(1-2a)x^3$，
因為 x^3 項係數為 0，則 $1-2a=0$，
故 $a=\dfrac{1}{2}$

(2) 由因式定理可知 $f(-1)=0$，
則 $f(-1)=((-1)^2-2\cdot(-1)+a)(a\cdot(-1)^2-1+1)=a\ (a+3)=0$，
得 $a=0$ 或 -3

3. 試求二次函數 $f(x)=x^2-6x+3$ 在 $0\le x\le 8$ 的最大值與最小值

解 $f(x)=x^2-6x+3=(x-3)^2-6$，
由下圖可知，當 $0\le x\le 8$ 時，
$f(x)$ 的最大值為 $f(8)=8^2-6\cdot 8+3=64-48+3=19$，
$f(x)$ 的最小值為 $f(3)=-6$



4. (1) 試求 x^5+3x^4 除以 $x+3$ 的餘式
(2) 試求 x^5+3x^4 除以 x^2+4x+3 的餘式。　（提示：先將 x^2+4x+3 因式分解）

解 (1) 由餘式定理可知多項式 $f(x)$ 除以 $x+3$ 的餘式為 $f(-3)$
令 $f(x)=x^5+3x^4$，則 $f(-3)=(-3)^5+3\cdot(-3)^4=-243+243=0$
因此 x^5+3x^4 除以 $x+3$ 的餘式為 0

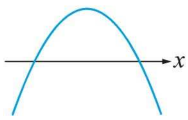
(2) 〔解法一〕
$x^2+4x+3=(x+1)(x+3)$，
因為多項式 $f(x)$ 除以 $x+1$ 的餘式為 $f(-1)$，
則 $f(-1)=(-1)^5+3\cdot(-1)^4=2$
令 $f(x)=(x^2+4x+3)\,q(x)+(ax+b)$，
由 $f(-3)=0$，$f(-1)=2$，可得 $\begin{cases}-3a+b=0，\\ -a+b=2，\end{cases}$
解得 $a=1$，$b=3$
因此 x^5+3x^4 除以 x^2+4x+3 的餘式為 $x+3$

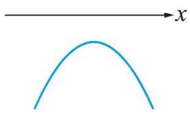
〔解法二〕

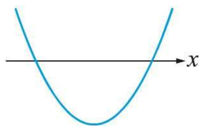
$$
\begin{array}{r|l}
 & x^3 - x^2 + x - 1 \\
\hline
x^2+4x+3 & x^5+3x^4+0x^3+0x^2+0x+0 \\
 & x^5+4x^4+3x^3 \\
\hline
 & -x^4-3x^3+0x^2 \\
 & -x^4-4x^3-3x^2 \\
\hline
 & x^3+3x^2+0x \\
 & x^3+4x^2+3x \\
\hline
 & -x^2-3x+0 \\
 & -x^2-4x-3 \\
\hline
 & x+3
\end{array}
$$

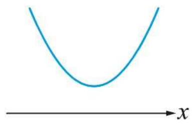
因此 x^5+3x^4 除以 x^2+4x+3 的餘式為 $x+3$

5. 試問 $y=m^2x^2+mx+1$ 的圖形可能是下列哪一種？

(A) 

(B) 

(C) 

(D) 

解 判別式 $b^2-4ac=m^2-4\cdot m^2\cdot 1=-3m^2<0$

因為 $m^2>0$，所以圖形開口朝上，

且判別式 $b^2-4ac<0$，所以圖形與 x 軸沒有交點。

故選(D)

6. 我們藉由地理學上的實際測量可提出一個觀點，即“河流越往下游，河谷的寬度越寬且河流從源頭往下流的距離與河流的河谷寬度呈一次函數的關係”。今有某條河流全長為 50 公里且在源頭的河谷寬度有 2 公尺，往下流了 6 公里後，河谷的寬度變為 4 公尺。試問在出海口處，此河流的河谷寬度為幾公尺？

解 依題意，此河流在距離源頭 x 公里處的河谷寬度為 $f(x)=ax+b$（公尺）

且 $f(0)=2$，$f(6)=4$

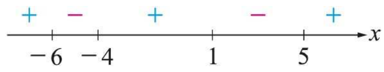
因此 $\begin{cases} b=2, \\ 6a+b=4, \end{cases}$ 解得 $a=\dfrac{1}{3}$，$b=2$，

故 $f(x)=\dfrac{1}{3}x+2$

所求為 $f(50)=\dfrac{1}{3}\times 50+2=\dfrac{56}{3}$（公尺）

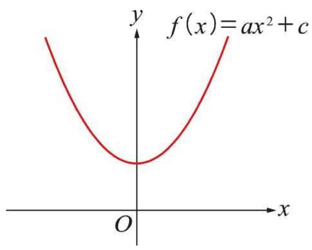
7. 試問有多少個整數滿足不等式 $(x+6)(x+4)(x-1)(x-5)\le 0$？

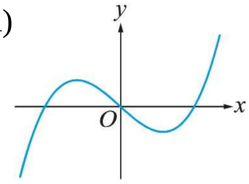
解 $(x+6)(x+4)(x-1)(x-5)\le 0$，
依 x 在數線上的值判斷 $x+6$，$x+4$，$x-1$，$x-5$ 的正負號，
綜合判斷可得

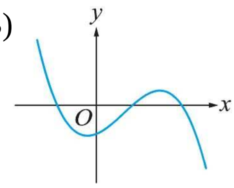


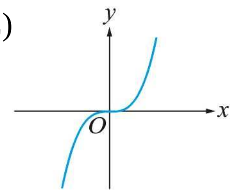
則滿足不等式的解為 $-6\le x\le -4$ 或 $1\le x\le 5$，
故滿足不等式的整數有 −6，−5，−4，1，2，3，4，5，共 8 個

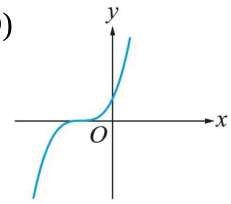
8. 已知二次函數 $f(x)=ax^2+c$ 的圖形如右圖，則下列哪一個圖形最有可能為三次函數 $g(x)=a(x+c)^3$ 的圖形？

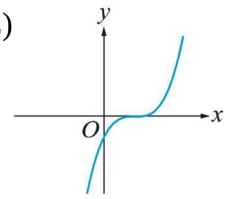


(A)


(B)


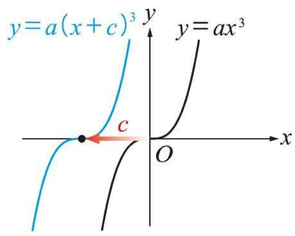
(C)


(D)


(E)


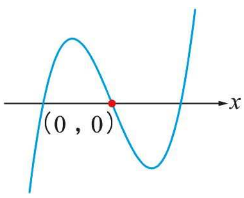
解 由二次函數 $f(x)=ax^2+c$ 的圖形可知 $a>0$ 且 $c>0$。

$y=ax^3 \xrightarrow{\text{向左平移 } c \text{ 單位}} y=a(x+c)^3$，故圖形為(D)

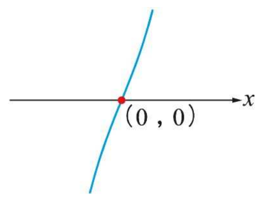


*9. 若三次函數 $f(x)=ax^3+px$ 滿足 $f(-5)<0$，$f(-2)>0$，試判斷 a，p 的正負號

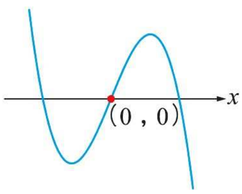
解 (1) 若 $a>0$，$p<0$



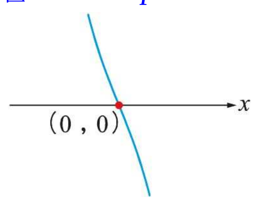
(2) 若 $a>0$，$p>0$



(3) 若 $a<0$，$p>0$。



(4) 若 $a<0$，$p<0$。



因為 $f(-5)<0$ 且 $f(-2)>0$，唯一符合的圖形只有(1)
故 $a>0$，$p<0$

*10. 設多項式 $f(x)=x^4-8x^3+9x^2-15x+100$ 除以 $g(x)$ 的商式為 $x-6$，餘式為 -98，試求 $g(7)$　（提示：先把條件寫成除法原理的形式）

解 依題意，將多項式 $f(x)$ 用除法原理表示為 $f(x)=g(x)(x-6)-98$

因為 $f(x)$ 除以 $x-7$ 的餘式為 $f(7)$，以綜合除法計算 $f(x)$ 除以 $x-7$ 的餘式，

$$\begin{array}{rrrrr|l} 1 & -8 & +9 & -15 & +100 & 7 \\ & +7 & -7 & +14 & -7 & \\ \hline 1 & -1 & +2 & -1 & +93 & \end{array}$$

因此 $f(7)=93$

由 $f(7)=g(7)(7-6)-98$，得 $93=g(7)-98$，故 $g(7)=93+98=191$