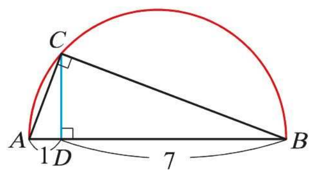
第 1 章　綜合演練詳解

1. 請問下列哪些敘述是正確的？
(A) 0 是有理數
(B)給定長度為 1 的線段，可用作圖做出長度為 $\sqrt{7}$ 的線段
(C)每一個有理數都可以經由作圖在數線上找到其位置
(D)在數線上兩個相異整數的距離至少是 1
(E) $0.\overline{9}=1$

解 (A) ○：0 是整數，也是有理數、實數
(B) ○：如右圖，$\overline{AB}=8$ 為直徑，則 $\angle ACB=90°$，
取 $\overline{AD}=1$，$\overline{BD}=7$，則 $\overline{CD}=\sqrt{1\times 7}=\sqrt{7}$



(C) ○：將有理數表成分數，再利用比例線段的方法即可作圖
(D) ○：整數的離散性
(E) ○：$0.\overline{9}=\dfrac{9}{9}=1$
故選(A)(B)(C)(D)(E)

2. 設 a，b，c 都是實數。 請問下列哪些敘述是正確的？
(A)若 $a>b$，則 $ac>bc$
(B) $\sqrt{a^2}=|a|$
(C) $\dfrac{a+b}{2}\geq\sqrt{ab}$
(D)若 a，b 是無理數，則 $a+b$ 一定也是無理數
(E)若 $|a|>|b|$，則 $a>b$

解 (A) ×：當 $c<0$ 時，由 $a>b$ 得 $ac<bc$
(B)○：當 a 為實數時，$\sqrt{a^2}=|a|$
(C) ×：當 $a\geq 0$，$b\geq 0$ 時，才會有 $\dfrac{a+b}{2}\geq\sqrt{ab}$ 的結果
(D) ×：當 $a=\sqrt{2}$，$b=-\sqrt{2}$ 時，$a+b=\sqrt{2}-\sqrt{2}=0$ 為有理數
(E) ×：當 $a=-5$，$b=3$ 時，$|a|>|b|$，但 $a<b$
故選(B)

3. 在 $\sqrt{1}$，$\sqrt{2}$，$\sqrt{3}$，…，$\sqrt{200}$ 中有多少個無理數？

解 當 n 是正整數且不是完全平方數時，$\sqrt{n}$ 是無理數
1 到 200 的正整數中，是完全平方數的有 1^2，2^2，3^2，…，14^2，共 14 個
因此不是完全平方數的有 $200-14=186$ 個
故 $\sqrt{1}$，$\sqrt{2}$，$\sqrt{3}$，…，$\sqrt{200}$ 中有 186 個無理數

4. 試比較 $0.0\overline{1}+0.0\overline{2}+\cdots+0.0\overline{9}$ 和 0.5 的大小關係

解 設 $x=0.0\overline{1}$，則 $10x=0.\overline{1}$，$100x=1.\overline{1}$，兩式相減，得

$$\begin{array}{rr} & 100x=1.\overline{1} \\ -) & 10x=0.\overline{1} \\ \hline & 90x=1 \end{array}$$

因此，$x=\dfrac{1}{90}$。以此類推，

$0.0\overline{1}+0.0\overline{2}+\cdots+0.0\overline{9}=\dfrac{1}{90}+\dfrac{2}{90}+\cdots+\dfrac{9}{90}=\dfrac{45}{90}=\dfrac{5}{10}=0.5$

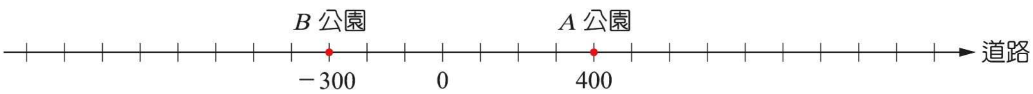
5. 實數 $\sqrt{14+6\sqrt{5}}$ 的整數部分為 a，小數部分為 b，試求 b 的值

解 $\sqrt{14+6\sqrt{5}}=\sqrt{14+2\sqrt{45}}=\sqrt{(\sqrt{9}+\sqrt{5})^2}=\left|\sqrt{9}+\sqrt{5}\right|=3+\sqrt{5}$

因為 $2<\sqrt{5}<3$，所以 $5<3+\sqrt{5}<6$

整數部分 $a=5$，小數部分 $b=(3+\sqrt{5})-5=\sqrt{5}-2$

6. 已知一道路上有 A，B 兩公園，其相關位置可以用數線表示如下。今小菡想在此道路上購屋且希望住家附近 600 公尺內有公園，請幫她在下圖的數線上找出住家位置適合的範圍並將範圍以區間表示



解 在 A 公園 600 公尺內的範圍為 $[400-600，400+600]=[-200，1000]$，

在 B 公園 600 公尺內的範圍為 $[-300-600，-300+600]=[-900，300]$

這兩個範圍皆為住家位置適合的範圍，因此住家位置適合的範圍為 $[-900，1000]$

*7. 已知 $a\neq b$ 且 $\dfrac{a}{b}+\dfrac{b}{a}=6$，試求 $\left(\dfrac{a+b}{a-b}\right)^2$ 的值

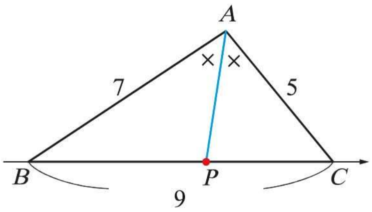
解 將 $\dfrac{a}{b}+\dfrac{b}{a}=6$ 兩邊同乘以 ab，得 $\left(\dfrac{a}{b}+\dfrac{b}{a}\right)ab=6ab$，即 $a^2+b^2=6ab$

所以 $(a+b)^2=a^2+b^2+2ab=6ab+2ab=8ab$，

$(a-b)^2=a^2+b^2-2ab=6ab-2ab=4ab$

故 $\left(\dfrac{a+b}{a-b}\right)^2=\dfrac{(a+b)^2}{(a-b)^2}=\dfrac{8ab}{4ab}=2$

8. 如下圖，△ABC 的邊長為 5、7、9，將 BC 邊貼在數線上，使 B 為原點，∠A 的角平分線交數線於 P 點，試問 P 點的坐標為何？



解 在△ABC 中，∠A 的角平分線交 $\overline{BC}$ 於 P 點，
所以 $\overline{BP}:\overline{PC}=\overline{AB}:\overline{AC}=7:5$
又 B 點坐標為 0，C 點坐標為 9，
由分點公式得 P 點的坐標為 $\dfrac{7\times9+5\times0}{7+5}=\dfrac{21}{4}$

*9. 破布木（Cordia dichotoma G. Forst.）是常用的建築用木材，
其密度 x 的值在 0.65～0.80 g / cm^3，則：
(1) 將密度 x 值的範圍化為 $|x-a|\le b$，試求 a，b 的值
(2) 今有一塊破布木，長、寬、高經測量分別為 0.31 公尺、1.25 公尺、1.14 公尺，試估計此木頭重量的範圍。


破布木的果實

解 (1) 因為 $0.65\le x\le 0.80$ 且 0.65 和 0.80 的中點為 $\dfrac{0.65+0.80}{2}=\dfrac{1.45}{2}=0.725$，
所以由 $0.65-0.725\le x-0.725\le 0.80-0.725$，
得 $-0.075\le x-0.725\le 0.075$，
即 $|x-0.725|\le 0.075$
因此 $a=0.725$，$b=0.075$

(2) 此木頭的體積為 $0.31\times1.25\times1.14=0.44175$（m^3）$=441750$（cm^3），
又 $441750\times0.65=287137.5$（g）$=287.1375$（kg），
$441750\times0.80=353400$（g）$=353.4$（kg）
故估計此木頭的重量約為 287.1375 公斤到 353.4 公斤之間

10. 若 a，b 為正數，則：

(1) 試比較 $\dfrac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}$ 和 $\dfrac{a+b}{2}$ 的大小關係。（提示：通分後相減）

(2) 承(1)，何時兩者相等？

解 (1) $\dfrac{a+b}{2}-\dfrac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}=\dfrac{a+b}{2}-\dfrac{2ab}{a+b}=\dfrac{(a+b)^2-4ab}{2(a+b)}=\dfrac{(a-b)^2}{2(a+b)}\geq 0$

故 $\dfrac{a+b}{2}\geq\dfrac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}$

(2) 由(1)知，當 $\dfrac{(a-b)^2}{2(a+b)}=0$ 時，即 $a=b$ 時，$\dfrac{a+b}{2}=\dfrac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}$