習題 3-1 解答

一、基本題

1. 設多項式 $f(x)=x^3+(a-1)x^2+2x-3$，$g(x)=x^3-2x^2-bx+c+1$ 且 $f(x)$ 與 $g(x)$ 兩多項式相等，試求 a，b，c 的值

解 因為 $f(x)=g(x)$，即 $x^3+(a-1)x^2+2x-3=x^3-2x^2-bx+c+1$，

比較各項係數後可得 $\begin{cases} a-1=-2\text{，} \\ 2=-b\text{，} \\ -3=c+1\text{。} \end{cases}$

因此 $a=-1$，$b=-2$，$c=-4$

2. 設多項式 $f(x)=2x^3-x^2+3x-4$，$g(x)=(x-1)^2$，試求：

(1) $f(x)+g(x)$　　(2) $f(x)-g(x)$

(3) $f(x)g(x)$　　(4) $f(x)$ 除以 $g(x)$ 的商式及餘式

解 $f(x)=2x^3-x^2+3x-4$，

$g(x)=(x-1)^2=x^2-2x+1$

(1) $f(x)+g(x)=2x^3+(-x^2+x^2)+(3x-2x)+(-4+1)=2x^3+x-3$

(2) $f(x)-g(x)=2x^3+(-x^2-x^2)+(3x+2x)+(-4-1)=2x^3-2x^2+5x-5$

(3)

$$\begin{array}{rrrrrrr}
 & & & 2x^3 & -x^2 & +3x & -4 \\
\times) & & & & x^2 & -2x & +1 \\
\hline
 & & & 2x^3 & -x^2 & +3x & -4 \\
 & & -4x^4 & +2x^3 & -6x^2 & +8x & \\
 & 2x^5 & -x^4 & +3x^3 & -4x^2 & & \\
\hline
 & 2x^5 & -5x^4 & +7x^3 & -11x^2 & +11x & -4
\end{array}$$

(4)

$$\begin{array}{r|rrrr}
 & 2x & +3 & & \\
\cline{2-5}
x^2-2x+1 & 2x^3 & -x^2 & +3x & -4 \\
 & 2x^3 & -4x^2 & +2x & \\
\cline{2-5}
 & & 3x^2 & +x & -4 \\
 & & 3x^2 & -6x & +3 \\
\cline{2-5}
 & & & 7x & -7
\end{array}$$

$f(x)$ 除以 $g(x)$ 的商式為 $2x+3$，餘式為 $7x-7$

3. 利用綜合除法求解下列問題：

(1) $(x^3+5x^2-6)\div(x+1)$的商式和餘式　　(2) $x^6\div(x-2)$的商式和餘式

解 (1)

$$\begin{array}{rrrr|r} 1 & +5 & +0 & -6 & -1 \\ & -1 & -4 & +4 & \\ \hline 1 & +4 & -4 & \underline{|-2} & \end{array}$$

故（x^3+5x^2-6）÷（$x+1$）的商式為 x^2+4x-4，餘式為-2

(2)

$$\begin{array}{rrrrrrr|r} 1 & +0 & +0 & +0 & +0 & +0 & +0 & 2 \\ & +2 & +4 & +8 & +16 & +32 & +64 & \\ \hline 1 & +2 & +4 & +8 & +16 & +32 & \underline{|+64} & \end{array}$$

故 $x^6\div(x-2)$ 的商式為 $x^5+2x^4+4x^3+8x^2+16x+32$，餘式為 64

4. (1) 已知多項式 $f(x)=x^3-8x^2+x-85$，試求 $f(9)$ 的值

(2) 試求 $x^{101}+x^{10}+2$ 除以 $x-1$ 的餘式

解 (1) $f(9)$ 即 $f(x)$ 除以 $x-9$ 的餘式，

由綜合除法

$$\begin{array}{rrrr|r} 1 & -8 & +1 & -85 & 9 \\ & +9 & +9 & +90 & \\ \hline 1 & +1 & +10 & \underline{|+\ 5} & \end{array}$$

故 $f(9)=5$

(2) 令 $g(x)=x^{101}+x^{10}+2$，$g(x)$ 除以 $x-1$ 的餘式為 $g(1)$。

$g(1)=1^{101}+1^{10}+2=4$，故 $x^{101}+x^{10}+2$ 除以 $x-1$ 的餘式為 4

5. 下列何者是多項式 $f(x)=2x^4+3x^3-2x^2-x-2$ 的因式？

(A) $x+1$　(B) $x+2$　(C) $x+5$　(D) $x-3$

解 由因式定理可知若 $x-a$ 為 $f(x)$ 的因式，則 $f(a)=0$

(A) ×：$f(-1)=2-3-2+1-2=-4\neq 0$

(B) ○：$f(-2)=2(-2)^4+3(-2)^3-2(-2)^2-(-2)-2=32-24-8+2-2=0$

(C) ×：

$$\begin{array}{rrrrr|r} 2 & +3 & -2 & -1 & -2 & -5 \\ & -10 & +35 & -165 & +830 & \\ \hline 2 & -7 & +33 & -166 & \underline{|+828} & \end{array}$$

(D) ×：

$$\begin{array}{rrrrr|r} 2 & +3 & -2 & -1 & -2 & 3 \\ & +6 & +27 & +75 & +222 & \\ \hline 2 & +9 & +25 & +74 & \underline{|+220} & \end{array}$$

故選(B)

6. 已知 $2x^2-x+2$ 除以 $x+1$ 得商式 $2x-3$，餘式為 5。請完成下列算式：

(1) $2x^2-x+2=(x+1)(2x-3)+$______

(2) $\dfrac{2x^2-x+2}{x+1}=(2x-3)+$______

解 (1) 由除法原理可知 $2x^2-x+2=(x+1)(2x-3)+5$

(2) $\dfrac{2x^2-x+2}{x+1}=\dfrac{(x+1)(2x-3)}{x+1}+\dfrac{5}{x+1}=(2x-3)+\dfrac{5}{x+1}$

二、進階題

7. 設 $f(x)$，$g(x)$ 皆為三次多項式，$h(x)$ 為一次多項式，試問下列各敘述是否正確？若不正確，請寫出正確的結論

(1) $f(x)+g(x)$ 為三次多項式

(2) $f(x)g(x)$ 為九次多項式

(3) 若 $f(x)$ 除以 $h(x)$ 的餘式為 r，則 $f(x)$ 除以 $3h(x)$ 的餘式為 $3r$

(4) 若 $f(x)$ 除以 $h(x)$ 的商式為 $q(x)$，則 $f(x)$ 除以 $3h(x)$ 的商式為 $3q(x)$

解 (1) $f(x)+g(x)$ 的次數為小於或等於三次，

例如： $f(x)=x^3$ ， $g(x)=-x^3+2x$ ，則 $f(x)+g(x)=2x$ 為一次多項式

(2) 設 $f(x)=a_3x^3+a_2x^2+a_1x+a_0$ ， $g(x)=b_3x^3+b_2x^2+b_1x+b_0$ ，

則 $f(x)g(x)=a_3b_3x^6+(a_3b_2+a_2b_3)x^5+\cdots+a_0b_0$ ，$f(x)g(x)$ 為六次多項式

(3) 設 $f(x)$ 除以 $h(x)$ 的商式為 $q(x)$，餘式為 r，

由除法原理可知 $f(x)=h(x)q(x)+r$，

則 $f(x)=h(x)q(x)+r=3h(x)\left(\dfrac{1}{3}q(x)\right)+r$ ，

故 $f(x)$ 除以 $3h(x)$ 的餘式仍為 r

(4) 由(3)可知 $f(x)=h(x)q(x)+r=3h(x)\left(\dfrac{1}{3}q(x)\right)+r$ ，

故 $f(x)$ 除以 $3h(x)$ 的商式為 $\dfrac{1}{3}q(x)$

8. (1) 若 x^4+ax^2+bx-4 有因式 $x-1$ 及 $x+2$，試求 a，b 的值

(2) 設三次多項式 $f(x)$ 滿足 $f(1)=f(2)=0$，且 $f(0)=2$，$f(-1)=-6$，試求 $f(x)$

解 (1) 由因式定理可知 $f(1)=0$，$f(-2)=0$，

可得 $\begin{cases}f(1)=1+a+b-4=0，\\ f(-2)=16+4a-2b-4=0，\end{cases}$ 故 $\begin{cases}a+b=3，\\ 4a-2b=-12。\end{cases}$

因此 $a=-1$，$b=4$

(2) 由 $f(1)=f(2)=0$ 及因式定理，可設 $f(x)=(x-1)(x-2)(ax+b)$

依題意 $f(0)=2$，$f(-1)=-6$，

代入得 $\begin{cases} f(0)=(0-1)(0-2)(0+b)=2\text{，} \\ f(-1)=(-1-1)(-1-2)(-a+b)=-6\text{，} \end{cases}$

故 $\begin{cases} 2b=2\text{，} \\ 6(-a+b)=-6\text{，} \end{cases}$ 解得 $a=2$，$b=1$

因此 $f(x)=(x-1)(x-2)(2x+1)=2x^3-5x^2+x+2$

9. 若多項式 $f(x)=4x^3-6x^2-2x+3=a(x+1)^3+b(x+1)^2+c(x+1)+d$，其中 a，b，c，d 為常數，試求 a，b，c，d 的值。（提示：連續用綜合除法）

解 連續使用綜合除法

$$
\begin{array}{rrrr|l}
4 & -6 & -2 & +3 & -1 \\
 & -4 & +10 & -8 & \\
\hline
4 & -10 & +8 & -5 & \\
 & -4 & +14 & & \\
\hline
4 & -14 & +22 & & \\
 & -4 & & & \\
\hline
4 & -18 & & &
\end{array}
$$

所以 $f(x)=4(x+1)^3-18(x+1)^2+22(x+1)-5$，

因此 $a=4$，$b=-18$，$c=22$，$d=-5$

10. (1) 設多項式 $f(x)$ 除以 $x-2$ 的餘式為 2，除以 $x-3$ 的餘式為 5，試求 $f(x)$ 除以 x^2-5x+6 的餘式

(2) 設多項式 $f(x)$ 除以 $x-1$ 的餘式為 2，除以 x^2+x-6 的餘式為 $2x-3$，試求 $f(x)$ 除以 x^2+2x-3 的餘式

解 (1) 設 $f(x)$ 除以 x^2-5x+6 的商式為 $q(x)$，餘式為 $ax+b$

由除法原理可知

$f(x)=(x^2-5x+6)\,q(x)+(ax+b)$

$=(x-2)(x-3)q(x)+(ax+b)$，

且由餘式定理及題意可知 $f(2)=2$，$f(3)=5$

故 $\begin{cases} f(2)=2a+b=2\text{，} \\ f(3)=3a+b=5\text{，} \end{cases}$ 得 $a=3$，$b=-4$

因此 $f(x)$ 除以 x^2-5x+6 的餘式為 $3x-4$

(2) 設 $f(x)=(x^2+2x-3)\,q(x)+(ax+b)$，

即 $f(x)=(x+3)(x-1)\,q(x)+(ax+b)$

由餘式定理及題意可知 $f(1)=2$，$f(x)=(x^2+x-6)\,q_1(x)+2x-3$，

即 $f(x)=(x+3)(x-2)\,q_1(x)+2x-3$，

得 $f(-3)=0+2(-3)-3=-9$

將 $f(1)=2$，$f(-3)=-9$ 代入 $f(x)=(x+3)(x-1)\,q(x)+(ax+b)$，

得 $\begin{cases} f(1)=a+b=2\text{，} \\ f(-3)=-3a+b=-9\text{，} \end{cases}$ 解得 $a=\dfrac{11}{4}$，$b=-\dfrac{3}{4}$

故 $f(x)$ 除以 x^2+2x-3 的餘式為 $\dfrac{11}{4}x-\dfrac{3}{4}$

11. 若多項式 $x^3=ax(x-1)(x-2)+bx(x-1)+cx+d$，試求 a，b，c，d 的值

解 令 $x=0$ 代入，$0=a\cdot 0+b\cdot 0+c\cdot 0+d$，得 $d=0$

令 $x=1$ 代入，$1=a\cdot 0+b\cdot 0+c\cdot 1+d$，得 $c=1$

令 $x=2$ 代入，$8=a\cdot 0+b\cdot 2\cdot 1+c\cdot 2+d$，得 $b=3$

比較左右兩式 x^3 項的係數可得 $a=1$。

故 $a=1$，$b=3$，$c=1$，$d=0$

三、挑戰題

12. 若多項式 $(x-1)f(x)$ 除以 x^2-x+1 的餘式為 $3x+5$，試求 $f(x)$ 除以 x^2-x+1 的餘式

解 設 $f(x)=(x^2-x+1)\,g(x)+(ax+b)$，

則 $(x-1)f(x)=(x-1)(x^2-x+1)\,g(x)+(ax+b)(x-1)$

$=(x-1)(x^2-x+1)\,g(x)+(ax^2+(b-a)x-b)$，

$$\begin{array}{r|l} & a \\ \hline x^2-x+1 & ax^2+(b-a)x-b \\ & ax^2-ax+a \\ \hline & bx-(b+a) \end{array}$$

故 $(x-1)f(x)$ 除以 x^2-x+1 的餘式為 $bx-(b+a)=3x+5$，

得 $b=3$，$-b-a=5$，故 $a=-8$

因此 $f(x)$ 除以 x^2-x+1 的餘式為 $-8x+3$