

2-1 指數

例題 1 指數律的基本性質

試求下列 x 代表的數：

$$(1) \underbrace{3 \times 3 \times \dots \times 3}_{6 \text{ 個}} = 3^x, x = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$(2) 5^{12} = (5^x)^4, x = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$(3) 7^5 \times 3^5 = x^5, x = \underline{\hspace{2cm}}$$

解 (1) $3 \times 3 \times \dots \times 3 = 3^6$
 $\underbrace{\hspace{1.5cm}}_{6 \text{ 個}}$
 $\Rightarrow x = 6$

$$(2) 5^{12} = (5^x)^4 \Rightarrow 4x = 12$$

$$\Rightarrow x = 3$$

$$(3) 7^5 \times 3^5 = (7 \times 3)^5 = 21^5$$

$$\Rightarrow x = 21$$

例題 2 正整數指數和指數律

試求下列各式的值：

$$(1) \frac{(14^2)^4}{(2^3 \times 7)^5} = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$(2) (\sqrt{5})^5 (\sqrt{5})^3 = \underline{\hspace{2cm}}$$

解 (1) $\frac{(14^2)^4}{(2^3 \times 7)^5} = \frac{14^8}{(2^3 \times 7)^5} = \frac{(2 \times 7)^8}{(2^3 \times 7)^5} = \frac{2^8 \times 7^8}{2^{15} \times 7^5}$
 $= \frac{7^3}{2^7} = \frac{343}{128}$

$$(2) (\sqrt{5})^5 (\sqrt{5})^3 = (\sqrt{5})^{5+3} = (\sqrt{5})^8 = ((\sqrt{5})^2)^4$$

$$= 5^4 = 625$$

例題 3 使用計算機求正整數指數式的值

使用計算機求下列各式的值，若有小數且超過四位，請四捨五入至小數第四位。

(1) $23^4 =$ _____

(2) $3.12^3 =$ _____

(3) $(-13)^4 =$ _____

(4) $(-1.2)^5 =$ _____

解 (1)按計算機得 $23^4 = 279841$

(2)按計算機得 $3.12^3 = 30.371328 \approx 30.3713$

(3)按計算機得 $(-13)^4 = 28561$

(4)按計算機得 $(-1.2)^5 = -2.48832 \approx -2.4883$

例題 4 使用計算機求實數指數式的值

使用計算機求下列各式的值，若小數超過五位，請四捨五入到小數第五位。

(1) $3^{-2} =$ _____

(2) $17^{\frac{1}{4}} =$ _____

(3) $10^{0.8451} =$ _____

(4) $5^{1.7321} =$ _____

(5) $5^{\sqrt{3}} =$ _____

解 (1)按計算機得 $3^{-2} = 0.1111111111 \approx 0.11111$

(2)按計算機得 $17^{\frac{1}{4}} = 2.030543185 \approx 2.03054$

(3)按計算機得 $10^{0.8451} = 7.000031591 \approx 7.00003$

(4)按計算機得 $5^{1.7321} = 16.24373682 \approx 16.24374$

(5)按計算機得 $5^{\sqrt{3}} = 16.24245082 \approx 16.24245$

例題 5 實數指數和指數律試求下列 x 代表的數：

(1) $5^{-2} = \frac{1}{x}$, $x =$ _____

(2) $(-3)^x = 1$, $x =$ _____

(3) $(2\sqrt{2})^x = 4$, $x =$ _____

解 (1) $5^{-2} = \frac{1}{5^2} = \frac{1}{25} \Rightarrow x = 25$

(2) $(-3)^x = 1 \Rightarrow x = 0$

(3) $(2\sqrt{2})^x = 2^2 \Rightarrow \sqrt{2}x = 2 \Rightarrow x = \sqrt{2}$

例題 6 有理數與指數律

試求下列各式的值：

(1) $343^{\frac{2}{3}} =$ _____

(2) $8^{\frac{1}{4}} \times 2^{\frac{5}{4}} =$ _____

(3) $6^{\frac{1}{2}} \times 3^{\frac{3}{2}} =$ _____

(4) $\left(\frac{9}{25}\right)^{-\frac{1}{2}} =$ _____

解

(1) $343^{\frac{2}{3}} = (7^3)^{\frac{2}{3}} = 7^2 = 49$

(2) $8^{\frac{1}{4}} \times 2^{\frac{5}{4}} = (2^3)^{\frac{1}{4}} \times 2^{\frac{5}{4}} = 2^{\frac{3}{4}} \times 2^{\frac{5}{4}} = 2^2 = 4$

(3) $6^{\frac{1}{2}} \times 3^{\frac{3}{2}} = (2 \times 3)^{\frac{1}{2}} \times 3^{\frac{3}{2}} = 2^{\frac{1}{2}} \times 3^2 = 9\sqrt{2}$

(4) $\left(\frac{9}{25}\right)^{-\frac{1}{2}} = \left(\frac{25}{9}\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{5^2}{3^2}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{5}{3}$

例題 7 實數指數與指數律

試求下列各式的值：

(1) $(2\sqrt{2} \times 3\sqrt{2})^{2\sqrt{2}} = \underline{\hspace{2cm}}$

(2) $(3\sqrt{2} \times 5\sqrt{2})^{\sqrt{2}} = \underline{\hspace{2cm}}$

(3) $2\sqrt{2} \times 4^{-\frac{\sqrt{2}}{2}} = \underline{\hspace{2cm}}$

解

(1) $(2\sqrt{2} \times 3\sqrt{2})^{2\sqrt{2}} = ((2 \times 3)^{\sqrt{2}})^{2\sqrt{2}} = 6^4 = 1296$

(2) $(3\sqrt{2} \times 5\sqrt{2})^{\sqrt{2}} = ((3 \times 5)^{\sqrt{2}})^{\sqrt{2}} = 15^2 = 225$

(3) $2\sqrt{2} \times 4^{-\frac{\sqrt{2}}{2}} = 2\sqrt{2} \times (2^2)^{-\frac{\sqrt{2}}{2}} = 2\sqrt{2} \times 2^{-\sqrt{2}} = 2^0 = 1$

例題 8 科學記號

計算下列各式的值，並以科學記號表示：

(1) $3.5 \times 10^5 + 2.8 \times 10^4 = \underline{\hspace{2cm}}$

(2) $6.5 \times 10^5 - 7.8 \times 10^4 = \underline{\hspace{2cm}}$

(3) $(3 \times 10^{-3}) \times (2.4 \times 10^{-2}) = \underline{\hspace{2cm}}$

(4) $(7 \times 10^2) \div (2.8 \times 10^3) = \underline{\hspace{2cm}}$

解

(1) $3.5 \times 10^5 + 2.8 \times 10^4 = 35 \times 10^4 + 2.8 \times 10^4 = 37.8 \times 10^4 = 3.78 \times 10^5$

(2) $6.5 \times 10^5 - 7.8 \times 10^4 = 65 \times 10^4 - 7.8 \times 10^4 = 57.2 \times 10^4 = 5.72 \times 10^5$

(3) $(3 \times 10^{-3}) \times (2.4 \times 10^{-2}) = 3 \times 2.4 \times 10^{-3} \times 10^{-2} = 7.2 \times 10^{-5}$

(4) $(7 \times 10^2) \div (2.8 \times 10^3) = \frac{7}{2.8} \times 10^{2-3} = 2.5 \times 10^{-1}$

例題 9 科學記號的應用

已知電腦記憶體的基本單位是 Byte，簡寫為 B。已知 $1\text{KB}=2^{10}\text{B}$ ， $1\text{MB}=2^{10}\text{KB}$ ，

$1\text{GB}=2^{10}\text{MB}$ ， $1\text{TB}=2^{10}\text{GB}$ 。試問：

(1) 2 GB 等於多少 MB？

(2) 小雯新買的電腦配備一部 256 GB 的固態硬碟 (SSD)，以及一部 6 TB 的硬碟 (HDD)，試問此硬碟的容量是固態硬碟的幾倍？

解 (1) $2\text{GB}=2\times 2^{10}\text{MB}=2\times 1024\text{MB}=2048\text{MB}$

$$(2) \frac{6\text{TB}}{256\text{GB}} = \frac{6\times 2^{10}\text{GB}}{2^8\text{GB}} = 6\times 2^2 = 24$$

故此硬碟的容量是固態硬碟的 24 倍

例題 10 指數和指數律的應用

觀察某種細菌的數量，發現每過 1 小時會增加為原來的 3 倍。已知現在有此細菌 90000 隻，試問：

(1) 2 小時後有幾隻？

(2) 2 小時前有幾隻？

解 (1) $90000\times 3^2 = 90000\times 9 = 810000$

∴ 2 小時後有 810000 隻

(2) 設 2 小時前有 x 隻

$$x\cdot 3^2 = 90000 \Rightarrow x = 10000$$

故 2 小時前有 10000 隻