例題 1 乘法公式

展開並化簡下列各式：

(1) $(x-2)^2$

(2) $(x+2y)^3$

(3) $(3x-2y)(9x^2+6xy+4y^2)$

解 (1) $(x-2)^2=x^2-2\cdot2\cdot x+2^2$
$=x^2-4x+4$

(2) $(x+2y)^3=x^3+3x^2(2y)+3x(2y)^2+(2y)^3$
$=x^3+6x^2y+12xy^2+8y^3$

(3) $(3x-2y)(9x^2+6xy+4y^2)=(3x-2y)\left[(3x)^2+(3x)(2y)+(2y)^2\right]$
$=(3x)^3-(2y)^3$
$=27x^3-8y^3$

例題 2 使用乘法公式因式分解

試將下列各式因式分解：

(1) $a^4-b^4=$________

(2) $8x^3-12x^2y+6xy^2-y^3=$________

(3) $8a^3+b^3=$________

解 (1) $a^4-b^4=(a^2+b^2)(a^2-b^2)$
$=(a^2+b^2)(a+b)(a-b)$

(2) $8x^3-12x^2y+6xy^2-y^3=(2x)^3-3(2x)^2y+3(2x)(y)^2-y^3$
$=(2x-y)^3$

(3) $8a^3+b^3=(2a)^3+b^3=(2a+b)\left[(2a)^2-(2a)b+b^2\right]$
$=(2a+b)(4a^2-2ab+b^2)$

例題 3 分式的運算

(1) $\dfrac{1}{x+1}-\dfrac{1}{x^2+3x+2}=$ ______

(2) $\dfrac{x^2+2x}{x^3-1}-\dfrac{1}{x^2+x+1}=$ ______

解

(1) $\dfrac{1}{x+1}-\dfrac{1}{x^2+3x+2}=\dfrac{x+2}{(x+1)(x+2)}-\dfrac{1}{(x+1)(x+2)}$

$=\dfrac{x+1}{(x+1)(x+2)}=\dfrac{1}{x+2}$

(2) $\dfrac{x^2+2x}{x^3-1}-\dfrac{1}{x^2+x+1}=\dfrac{x^2+2x}{(x-1)(x^2+x+1)}-\dfrac{x-1}{(x-1)(x^2+x+1)}$

$=\dfrac{x^2+2x-(x-1)}{(x-1)(x^2+x+1)}=\dfrac{x^2+x+1}{(x-1)(x^2+x+1)}$

$=\dfrac{1}{x-1}$

例題 4 乘法公式的應用

已知 $x+\dfrac{1}{x}=3$，試求：

(1) $x^2+\dfrac{1}{x^2}=$ ______

(2) $x^3+\dfrac{1}{x^3}=$ ______

解

(1) $\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^2=3^2=9$ ⇨ $x^2+\dfrac{1}{x^2}+2\cdot x\cdot\dfrac{1}{x}=9$

$\therefore\ x^2+\dfrac{1}{x^2}=7$

(2) $\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^3=3^3=27$ ⇨ $x^3+3x^2\cdot\dfrac{1}{x}+3x\left(\dfrac{1}{x}\right)^2+\dfrac{1}{x^3}=27$

⇨ $x^3+\dfrac{1}{x^3}+3\left(x+\dfrac{1}{x}\right)=27$ ⇨ $x^3+\dfrac{1}{x^3}+9=27$

$\therefore\ x^3+\dfrac{1}{x^3}=18$

例題 5 根式運算

有理化分母：

(1) $\dfrac{1}{3-\sqrt{2}}=$________ (2) $\dfrac{3-\sqrt{7}}{3+\sqrt{7}}=$________

解

(1) $\dfrac{1}{3-\sqrt{2}}=\dfrac{3+\sqrt{2}}{\left(3-\sqrt{2}\right)\left(3+\sqrt{2}\right)}=\dfrac{3+\sqrt{2}}{9-2}=\dfrac{3+\sqrt{2}}{7}$

(2) $\dfrac{3-\sqrt{7}}{3+\sqrt{7}}=\dfrac{\left(3-\sqrt{7}\right)^2}{\left(3+\sqrt{7}\right)\left(3-\sqrt{7}\right)}=\dfrac{9+7-6\sqrt{7}}{9-7}=\dfrac{16-6\sqrt{7}}{2}=8-3\sqrt{7}$

例題 6 根式的化簡

化簡下列各式：

(1) $\left(5+\sqrt{3}\right)\left(5-\sqrt{3}\right)=$________

(2) $\sqrt{54}-\sqrt{24}+2\sqrt{150}=$________

解

(1) $\left(5+\sqrt{3}\right)\left(5-\sqrt{3}\right)=5^2-\left(\sqrt{3}\right)^2=25-3=22$

(2) $\sqrt{54}-\sqrt{24}+2\sqrt{150}$

$=3\sqrt{6}-2\sqrt{6}+10\sqrt{6}$

$=11\sqrt{6}$

例題 7　雙重根式的化簡

試化簡下列雙重根式：

(1) $\sqrt{9+2\sqrt{14}}=$ ________　(2) $\sqrt{8-2\sqrt{15}}=$ ________

(3) $\sqrt{7+\sqrt{48}}=$ ________　(4) $\sqrt{5-\sqrt{21}}=$ ________

解

(1) $\sqrt{9+2\sqrt{14}}=\sqrt{7+2+2\sqrt{14}}$

$=\sqrt{\left(\sqrt{7}+\sqrt{2}\right)^2}=\sqrt{7}+\sqrt{2}$

(2) $\sqrt{8-2\sqrt{15}}=\sqrt{5+3-2\sqrt{15}}$

$=\sqrt{\left(\sqrt{5}-\sqrt{3}\right)^2}=\sqrt{5}-\sqrt{3}$

(3) $\sqrt{7+\sqrt{48}}=\sqrt{7+2\sqrt{12}}$

$=\sqrt{4+3+2\sqrt{12}}=\sqrt{\left(\sqrt{4}+\sqrt{3}\right)^2}$

$=\sqrt{4}+\sqrt{3}=2+\sqrt{3}$

(4) $\sqrt{5-\sqrt{21}}=\sqrt{\dfrac{10-2\sqrt{21}}{2}}$

$=\dfrac{\sqrt{7+3-2\sqrt{21}}}{\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{\left(\sqrt{7}-\sqrt{3}\right)^2}}{\sqrt{2}}$

$=\dfrac{\sqrt{7}-\sqrt{3}}{\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{14}-\sqrt{6}}{2}$

例題 8　雙重根式與相鄰的整數

$\sqrt{43-\sqrt{27}}$ 介於哪兩個連續整數之間？（ $\sqrt{3}\approx1.732$ ）

解

$\sqrt{27}=3\sqrt{3}\approx3\times1.732=5.196$

$43-\sqrt{27}\approx43-5.196=37.804$

$\sqrt{43-\sqrt{27}}\approx\sqrt{37.804}=6.\text{L L}$

故 $\sqrt{43-\sqrt{27}}$ 介於 6，7 之間

〈另解〉

$5<\sqrt{27}<6$

$\therefore -6<-\sqrt{27}<-5$

$43-6<43-\sqrt{27}<43-5$

$37<43-\sqrt{27}<38$

$\therefore\ \sqrt{37}<\sqrt{43-\sqrt{27}}<\sqrt{38}$

又 $\sqrt{37}>6$ ， $\sqrt{38}<7$

得 $6<\sqrt{43-\sqrt{27}}<7$ ，故介於 6，7 之間

例題 9　算幾不等式（一）

已知 a，$b>0$ 且 $2a+3b=4$，試求 ab 最大值及最大值發生時的 a，b 值

解　∵ a，$b>0$

∴由算幾不等式

$$\frac{2a+3b}{2}\geq\sqrt{(2a)(3b)}\Rightarrow\frac{4}{2}\geq\sqrt{6ab}$$

∴ $\sqrt{6ab}\leq 2\Rightarrow 6ab\leq 4$

∴ $ab\leq\frac{2}{3}$

得 ab 最大值為 $\frac{2}{3}$

此時 $2a=3b=2$

$\Rightarrow a=1$，$b=\frac{2}{3}$

∴ $a=1$，$b=\frac{2}{3}$ 時，ab 有最大值 $\frac{2}{3}$

例題 10 算幾不等式（二）

已知 x，$y>0$ 且 $xy=4$，試求 $x+2y$ 的最小值及最小值發生時的 x，y 值

解　∵ x，$y>0$

∴由算幾不等式

$$\frac{x+2y}{2}\geq\sqrt{x(2y)}\Rightarrow\frac{x+2y}{2}\geq\sqrt{2xy}=\sqrt{2\cdot 4}$$

∴ $x+2y\geq 2\sqrt{8}=4\sqrt{2}$

得 $x+2y$ 最小值為 $4\sqrt{2}$

此時 $x=2y$，代入已知

$xy=(2y)y=4$

$\Rightarrow y^2=2$　∴ $y=\sqrt{2}$

$x=2y=2\sqrt{2}$

故 $x=2\sqrt{2}$，$y=\sqrt{2}$ 時，

$x+2y$ 有最小值 $4\sqrt{2}$