【習題 1-3】

1.丟一枚均勻的硬幣兩次，令 A 表第一次丟出反面的事件，B 表第二次丟出正面的事件，C 表出現一次正面的事件，

(1)B，C 兩事件是否獨立?

(2)A，B，C 三事件是否獨立?

解答 (1)是;(2)否

解析 用「+」表出現正面，「−」表出現反面，則樣本空間為 $S=\{(+,+),(+,-),(-,+),(-,-)\}$

其中序對裡面的位置，代表依次出現的結果．

第一次丟出反面的事件 A 為$\{(-,+),(-,-)\}$， $P(A)=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$；

第二次丟出正面的事件 B 為$\{(+,+),(-,+)\}$， $P(B)=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$；

丟出一次正面的事件 C 為$\{(+,-),(-,+)\}$， $P(C)=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$ ．

(1)因為 $B\cap C=\{(-,+)\}$， $P(B\cap C)=\frac{1}{4}=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=P(B)\cdot P(C)$，

所以 B，C 兩事件是獨立事件．

(2)因為 $A\cap B\cap C=\{(-,+)\}$， $P(A\cap B\cap C)=\frac{1}{4}\neq\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}$，

所以 A，B，C 三事件不是獨立事件．

2.設兩事件 A 與 B 滿足 $P(A)=\frac{1}{2}$， $P(A\cup B)=\frac{7}{10}$ ．

(1)設 A 與 B 為互斥事件，求 $P(B)$．

(2)設 A 與 B 為獨立事件，求 $P(B)$．

解答 (1)$\frac{1}{5}$;(2)$\frac{2}{5}$

解析 (1)A 與 B 為互斥事件，即 $A\cap B=\varnothing$，$P(A\cap B)=0$，$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$

即 $\frac{7}{10}=\frac{1}{2}+P(B)-0$，得 $P(B)=\frac{7}{10}-\frac{1}{2}=\frac{1}{5}$ ．

(2)A 與 B 為獨立事件，$P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B)$

$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)=P(A)+P(B)-P(A)\cdot P(B)$

即 $\frac{7}{10}=\frac{1}{2}+P(B)-\frac{1}{2}\cdot P(B)$，得 $\frac{1}{2}\cdot P(B)=\frac{7}{10}-\frac{1}{2}$

故 $P(B)=\frac{2}{5}$ ．

3.小明今年欲申請 A，B，C 三所大學，其申請成功的機率分別為 0.2，0.4，0.5 且互不影響，求今年小明能順利申請到大學的機率．

解答 0.76

解析 今年小明能順利申請到大學的情形為申請成功 A 大學或申請成功 B 大學或申請成功 C 大學，三者之聯集$(A\cup B\cup C)$．因為三事件均互為獨立事件，所求為

$$P(A\cup B\cup C)=1-P(A'\cap B'\cap C')=1-P(A')P(B')P(C')$$

$$=1-(1-0.2)(1-0.4)(1-0.5)=1-0.8\times 0.6\times 0.5=0.76．$$

故今年小明能順利申請到大學的機率為 0.76．

4.設病人對某種治療藥物有反應的機率為 0.9，且不同的病人對此藥物的反應與否為獨立事件．今有三位病人接受此項治療，求

(1)其中有 2 位有反應的機率．　(2)至少有一位病人有反應的機率．

解答 (1)0.243;(2)0.999

解析 令 A，B，C 分別表甲、乙、丙三人對治療藥物反應的事件．

(1)有 2 位有反應的情形為 A 與 B 有反應事件$(A\cap B\cap C')$或 B 與 C 有反應事件$(A'\cap B\cap C)$或 C 與 A 有反應事件$(A\cap B'\cap C)$三者之聯集．因為 A，B，C 三事件均互為獨立事件，所以

$$P(A\cap B\cap C')+P(A'\cap B\cap C)+P(A\cap B'\cap C)$$

$$=P(A)\cdot P(B)\cdot P(C')+P(A')\cdot P(B)\cdot P(C)+P(A)\cdot P(B')\cdot P(C)$$

$$=0.9\times 0.9\times 0.1+0.1\times 0.9\times 0.9+0.9\times 0.1\times 0.9=0.243．$$

故有 2 位有反應的機率為 0.243．

(2)至少有一位病人有反應的情形為 A 有反應事件或 B 有反應事件或 C 有反應事件，三者之聯集$(A\cup B\cup C)$，因為 A，B，C 三事件均互為獨立事件，所求為

$$P(A\cup B\cup C)=1-P(A'\cap B'\cap C')=1-P(A')P(B')P(C')$$

$$=1-(1-0.9)(1-0.9)(1-0.9)=1-0.1\times 0.1\times 0.1=0.999．$$

故至少有一位病人有反應的機率為 0.999．

5.某學校的教師中已婚男老師有 18 人，已婚女老師 30 人，未婚男老師 12 人，未婚女老師 20 人.

(1)該校的教師中，性別和婚姻狀況是否有關?

(2)今加入新進男老師 10 名後，性別和婚姻狀況為獨立狀態，試問新進 10 名男老師中，有幾人為未婚狀態?

解答 (1)否;(2)4 人

解析 性別和婚姻狀況雙向表如下:

	已婚	未婚	合計
男性	18	12	30
女性	30	20	50
合計	48	32	80

(1)A 表教師為男性的事件，$P(A)=\dfrac{30}{80}$，

B 表教師為已婚的事件，$P(B)=\dfrac{48}{80}$，

$A\cap B$ 表男性且為已婚者的事件，$P(A\cap B)=\dfrac{18}{80}$，

因為 $\dfrac{30}{80}\times\dfrac{48}{80}=\dfrac{18}{80}$，即 $P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B)$,

所以 A 與 B 為獨立事件，即性別和婚姻狀況為獨立事件 .

(2)設 10 人中有 x 人為未婚狀態，則

	已婚	未婚	合計
男性	$18+(10-x)$	$12+x$	40
女性	30	20	50
合計	$58-x$	$32+x$	90

當 A 與 B 為獨立事件時，$P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B)$，即 $\dfrac{28-x}{90}=(\dfrac{40}{90})(\dfrac{58-x}{90})$，

整理得 $9(28-x)=4(58-x)$,

解得 $x=4$（人）.

6.設 A，B，C 為三獨立事件，若 $P(A\cap B)=\dfrac{1}{4}$， $P(B\cap C)=\dfrac{1}{6}$，且 $P(A\cup C)=\dfrac{2}{3}$，求 $P(A)$，$P(B)$，$P(C)$．

解答 $P(A)=\dfrac{1}{2}$， $P(B)=\dfrac{1}{2}$， $P(C)=\dfrac{1}{3}$

解析 若 A，B，C 為三獨立事件，則 A 與 B、B 與 C 及 A 與 C 亦為獨立事件．

A 與 B 為獨立事件， $P(A\cap B)=P(A)P(B)=\dfrac{1}{4}\cdots$①

B 與 C 為獨立事件， $P(B\cap C)=P(B)P(C)=\dfrac{1}{6}\cdots$②

A 與 C 為獨立事件，$P(A\cap C)=P(A)P(C)$

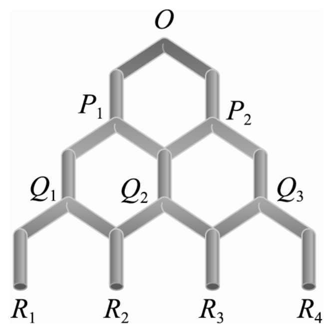
$P(A\cup C)=P(A)+P(C)-P(A\cap C)=P(A)+P(C)-P(A)P(C)=\dfrac{2}{3}\cdots$③

由① ÷ ②，得 $P(A)=\dfrac{3}{2}P(C)\cdots$④，將④代入③得， $\dfrac{3}{2}P(C)+P(C)-\dfrac{3}{2}(P(C)^2)=\dfrac{2}{3}$

$9P(C)^2-15P(C)+4=0$，$[3P(C)-1][3P(C)-4]=0$， $P(C)=\dfrac{1}{3}$ 或 $P(C)=\dfrac{4}{3}$（不合）

將 $P(C)=\dfrac{1}{3}$ 分別代入④、②得 $P(A)=\dfrac{1}{2}$、 $P(B)=\dfrac{1}{2}$，所以 $P(A)=\dfrac{1}{2}$， $P(B)=\dfrac{1}{2}$， $P(C)=\dfrac{1}{3}$ ．

7.下圖是一個分枝管道圖，從上方 O 處放入一顆彈珠，彈珠會隨機的向左或向右落下，若彈珠在分枝處向左或向右落下的機率相等，求彈珠出現在 R_2 的機率．



解答 $\dfrac{3}{8}$

解析 從 O 處放入一顆彈珠，落下的每一步皆為獨立事件，最後彈珠出現在 R_2 的情形及其機率有下列三種：

(1)$O\to P_1\to Q_1\to R_2$，

$P((O\to P_1)\cap(P_1\to Q_1)\cap(Q_1\to R_2))=P(O\to P_1)\cdot P(P_1\to Q_1)\cdot P(Q_1\to R_2)=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{8}$ ．

(2)$O\to P_1\to Q_2\to R_2$，

$P((O\to P_1)\cap(P_1\to Q_2)\cap(Q_2\to R_2))=P(O\to P_1)\cdot P(P_1\to Q_2)\cdot P(Q_2\to R_2)=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{8}$ ．

(3)$O\to P_2\to Q_2\to R_2$，

$P((O\to P_2)\cap(P_2\to Q_2)\cap(Q_2\to R_2))=P(O\to P_2)\cdot P(P_2\to Q_2)\cdot P(Q_2\to R_2)=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{8}$ ．

故所求之機率為 $\dfrac{1}{8}+\dfrac{1}{8}+\dfrac{1}{8}=\dfrac{3}{8}$ ．