【習題 1-2】

1.關於期望值的敘述，選出正確的選項：

(1)擲一個公正骰子 1 次，點數的期望值等於所有可能出現點數的算術平均數．

(2)擲一個公正骰子 2 次，點數和的期望值等於所有可能出現點數和的算術平均數．

(3)丟一枚均勻硬幣 1 次，正面出現次數的期望值是 $\frac{1}{2}$ ．

(4)丟一枚均勻硬幣 2 次，正面出現次數的期望值是 1．

解答 1234

解析 (1)因為擲一個公正骰子 1 次，出現每一種點數的機率皆為 $\frac{1}{6}$，點數的期望值為

$$1\times\frac{1}{6}+2\times\frac{1}{6}+3\times\frac{1}{6}+4\times\frac{1}{6}+5\times\frac{1}{6}+6\times\frac{1}{6}=\frac{1+2+3+4+5+6}{6},$$

所以點數的期望值等於所有可能出現點數的算術平均數．

(2)因為擲一個公正骰子 2 次，點數和 X 的可能取值與機率分布如下：

X	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
P	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

期望值為

$$E(X)=2\times\frac{1}{36}+3\times\frac{2}{36}+4\times\frac{3}{36}+5\times\frac{4}{36}+6\times\frac{5}{36}+7\times\frac{6}{36}$$

$$+8\times\frac{5}{36}+9\times\frac{4}{36}+10\times\frac{3}{36}+11\times\frac{2}{36}+12\times\frac{1}{36}=\frac{252}{36}=7,$$

可能出現點數和的算術平均數為 $\frac{2+3+4+5+6+7+8+9+10+11+12}{11}=7$ ．

(3)因為丟一枚均勻硬幣 1 次，正面出現次數 X 的可能取值與機率分布如下：

X	0	1
P	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

所以期望值為 $E(X)=0\times\frac{1}{2}+1\times\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$ ．

(4)因為丟一枚均勻硬幣 2 次，正面出現次數 X 的可能取值與機率分布如下：

X	0	1	2
P	$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{4}$	$\frac{1}{4}$

所以期望值為 $E(X)=0\times\frac{1}{4}+1\times\frac{2}{4}+2\times\frac{1}{4}=1$ ．

故選項(1)(2)(3)(4)正確．

2.箱中有 3 顆紅球與 3 顆白球，一摸彩遊戲是從箱中隨機同時抽出 2 顆球．若抽出的 2 球顏色不同，可得獎金 100 元；若 2 球顏色相同，則無獎金．請問此遊戲獎金的期望值為何?

解答　60 元

解析　令隨機變數 X 為同時抽出 2 球所得的金額，則 X 的取值與機率分布如下：

X	100	0
P	$\frac{C_1^3 C_1^3}{C_2^6}=\frac{9}{15}$	$\frac{C_2^3+C_2^3}{C_2^6}=\frac{6}{15}$

此遊戲獎金的期望值為 $E(X)=100\times\frac{9}{15}+0\times\frac{6}{15}=60$（元）.

3.擲一個公正的骰子 3 次，其中 6 點出現次數的期望值為多少?

解答　$\frac{1}{2}$ 次

解析　令隨機變數 X 為 6 點出現次數，則 X 的可能取值為 0，1，2，3，其機率分布如下：

X	0	1	2	3
P	$\frac{5^3}{6^3}=\frac{125}{216}$	$\frac{C_1^3\cdot 5^2}{6^3}=\frac{75}{216}$	$\frac{C_2^3\cdot 5}{6^3}=\frac{15}{216}$	$\frac{1}{6^3}=\frac{1}{216}$

6 點出現次數的期望值為 $E(X)=0\times\frac{125}{216}+1\times\frac{75}{216}+2\times\frac{15}{216}+3\times\frac{1}{216}=\frac{108}{216}=\frac{1}{2}$（次）.

4.甲乙兩人相約玩遊戲，由乙擲一個公正的骰子．若乙擲出的點數為質數，則可得到該點數 3 倍的金額；若出現其他點數，則要付該點數的金額給甲．試問此遊戲乙所得金額的期望值為多少元?

解答　$\frac{19}{6}$ 元

解析　令隨機變數 X 為乙所得的金額，X 的取值與機率分布如下：

點數	2	3	5	1	4	6
X	6	9	15	-1	-4	-6
P	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

乙所得報酬的期望值為

$E(X)=6\times\frac{1}{6}+9\times\frac{1}{6}+15\times\frac{1}{6}+(-1)\times\frac{1}{6}+(-4)\times\frac{1}{6}+(-6)\times\frac{1}{6}=\frac{19}{6}$（元）.

5.某飲料公司發售每瓶 20 元的飲料，配合「開瓶得現金」活動，其瓶蓋內印有 100 元、300 元、500 元等獎項，其中獎機率依次為千分之 14、12、10，其餘均為銘謝惠顧．若每瓶飲料的成本為 2 元，試問該公司預期每瓶飲料可賺多少元?

解答　8 元

解析　令隨機變數 X 為該公司每瓶飲料可賺的金額，X 的取值與機率分布如下：

X	$-100+18$	$-300+18$	$-500+18$	18
P	$\frac{14}{1000}$	$\frac{12}{1000}$	$\frac{10}{1000}$	$1-\frac{36}{1000}$

該公司每瓶飲料可賺金額的期望值為

$$E(X)=(-100+18)\times\frac{14}{1000}+(-300+18)\times\frac{12}{1000}+(-500+18)\times\frac{10}{1000}+18\times(1-\frac{36}{1000})$$

$$=-\frac{14}{10}-\frac{36}{10}-5+18+18\times(\frac{14}{1000}+\frac{12}{1000}+\frac{10}{1000}-\frac{36}{1000})=8\text{（元）}$$

所以該公司每瓶飲料可賺 8 元．

6.學科能力測驗中，多重選擇題每題有 5 個選項，其中至少有一個選項是正確的．其計分方式為：「每題答對得 5 分，只錯一個選項可得 3 分，錯兩個選項可得 1 分，未作答或答錯兩個以上者以 0 分計算」．今有一題你只確定選項 A 是正確的，其餘選項則隨意猜測，那麼依此計分方式，該題得分的期望值為多少?

解答　$\frac{23}{16}$分

解析　選項 A 之外，每題有 4 個選項，隨意猜答時，完全答對的機率是 $\frac{1}{2^4}$，答錯 1 個選項的機率是 $\frac{C_1^4}{2^4}$，錯兩個選項的機率是 $\frac{C_2^4}{2^4}$，未作答或答錯兩個以上的機率是 $1-\frac{1}{2^4}-\frac{C_1^4}{2^4}-\frac{C_2^4}{2^4}$．令隨機變數 X 為所得的分數，X 的取值與機率分布如下：

答題狀況	全對	答錯 1 個選項	答錯 2 個選項	未作答或答錯兩個以上
X	5	3	1	0
P	$\frac{1}{2^4}$	$\frac{C_1^4}{2^4}$	$\frac{C_2^4}{2^4}$	$1-\frac{1}{2^4}-\frac{C_1^4}{2^4}-\frac{C_2^4}{2^4}$

故此題得分的期望值為

$$E(X)=5\times\frac{1}{2^4}+3\times\frac{C_1^4}{2^4}+1\times\frac{C_2^4}{2^4}+0\times(1-\frac{1}{2^4}-\frac{C_1^4}{2^4}-\frac{C_2^4}{2^4})=\frac{23}{16}\text{（分）}.$$

7.帽子裡有五張卡片，其中兩張寫著 1，另三張寫著 2．從中抽出兩張，令 X 表示兩個數字的和，求 X 的機率分布、期望值與標準差．

解答　見解析，期望值 $\frac{16}{5}$ ，標準差 $\frac{3}{5}$

解析　抽出兩張卡片的數字和，情形可分為「二張 1」、「一張 1，一張 2」與「二張 2」三種，令隨機變數 X 為所得的數字和，X 的取值與機率分布如下：

抽出狀況	二張 1	一張 1 一張 2	二張 2
X	2	3	4
P	$\frac{C^2_2}{C^5_2}=\frac{1}{10}$	$\frac{C^2_1\cdot C^3_1}{C^5_2}=\frac{6}{10}$	$\frac{C^3_2}{C^5_2}=\frac{3}{10}$

故 X 的期望值與標準差為

$$E(X)=2\times\frac{1}{10}+3\times\frac{6}{10}+4\times\frac{3}{10}=\frac{32}{10}=\frac{16}{5},$$

$$Var(X)=(2-\frac{16}{5})^2\times\frac{1}{10}+(3-\frac{16}{5})^2\times\frac{6}{10}+(4-\frac{16}{5})^2\times\frac{3}{10}$$

$$=\frac{36}{25}\times\frac{1}{10}+\frac{1}{25}\times\frac{6}{10}+\frac{16}{25}\times\frac{3}{10}=\frac{90}{250}=\frac{9}{25},$$

$$\sigma(X)=\sqrt{Var(X)}=\sqrt{\frac{9}{25}}=\frac{3}{5}\ .$$

8.設生男生女的機率均等，對有 3 個小孩的家庭而言，令隨機變數 X 表示男孩的數量，求 X 的期望值、變異數與標準差．

解答　期望值 $\frac{3}{2}$ 個，變異數 $\frac{3}{4}$，標準差 $\frac{\sqrt{3}}{2}$ 個

解析　有 3 個小孩的家庭中，男女孩的數量有「3 男」、「2 男 1 女」、「1 男 2 女」與「3 女」四種情形，令隨機變數 X 表示男孩的數量，X 的取值與機率分布如下：

情形	3 女	1 男 2 女	2 男 1 女	3 男
X	0	1	2	3
P	$\frac{1}{2^3}=\frac{1}{8}$	$\frac{3}{2^3}=\frac{3}{8}$	$\frac{3}{2^3}=\frac{3}{8}$	$\frac{1}{2^3}=\frac{1}{8}$

故 X 的期望值、變異數與標準差為

$$E(X)=0\times\frac{1}{8}+1\times\frac{3}{8}+2\times\frac{3}{8}+3\times\frac{1}{8}=\frac{12}{8}=\frac{3}{2}\text{（個）},$$

$$Var(X)=(0-\frac{3}{2})^2\times\frac{1}{8}+(1-\frac{3}{2})^2\times\frac{3}{8}+(2-\frac{3}{2})^2\times\frac{3}{8}+(3-\frac{3}{2})^2\times\frac{1}{8}$$

$$=\frac{9}{4}\times\frac{1}{8}+\frac{1}{4}\times\frac{3}{8}+\frac{1}{4}\times\frac{3}{8}+\frac{9}{4}\times\frac{1}{8}=\frac{24}{32}=\frac{3}{4},$$

$$\sigma(X)=\sqrt{Var(X)}=\sqrt{\frac{3}{4}}=\frac{\sqrt{3}}{2}\text{（個）}.$$

9.摸彩箱裝有若干編號為 1，2，⋯，10 的彩球，其中各種編號的彩球數目可能不同．今從中隨機摸取一球，依據所取球的號數給予若干報酬．現有甲、乙兩案：甲案為當摸得彩球的號數為 k 時，其所獲報酬同為 k；乙案為當摸得彩球的號數為 k 時，其所獲報酬為 $11-k$（$k=1$，2，⋯，10）. 已知依甲案每摸取一球的期望值為 $\frac{67}{14}$ ，則依乙案每摸取一球的期望值為何?

$\boxed{\text{解答}}$ $\frac{87}{14}$

$\boxed{\text{解析}}$ 令隨機變數 X 表示甲案的報酬，$E(X)$表示報酬的期望值，$E(X)=\frac{67}{14}$ ．

依題意得知乙案所得報酬的期望值為 $E(11-X)$，由期望值的性質計算：

$E(11-X)=11-E(X)=11-\frac{67}{14}=\frac{87}{14}$,

故乙案每摸取一球的期望值為 $\frac{87}{14}$ ．

10.一箱中有 2 顆白球和 7 顆紅球．從箱中隨機取球，一次一個取後不放回，直到取到紅球為止．求所取出球個數的期望值和標準差．

$\boxed{\text{解答}}$ 期望值 $\frac{5}{4}$ 顆，標準差 $\frac{\sqrt{35}}{12}$ 顆

$\boxed{\text{解析}}$ 令隨機變數 X 表示取出球個數，X 的取值與機率分布如下：

情形	1 紅球	（白球，紅球）	（白球，白球，紅球）
X	1	2	3
P	$\frac{7}{9}$	$\frac{2}{9}\times\frac{7}{8}=\frac{7}{36}$	$\frac{2}{9}\times\frac{1}{8}\times\frac{7}{7}=\frac{1}{36}$

(1)X 的期望值為 $E(X)=1\times\frac{7}{9}+2\times\frac{7}{36}+3\times\frac{1}{36}=\frac{45}{36}=\frac{5}{4}$（顆）.

(2) $E(X^2)=1\times\frac{7}{9}+4\times\frac{7}{36}+9\times\frac{1}{36}=\frac{65}{36}$,

$Var(X)=E(X^2)-\mu^2=\frac{65}{36}-(\frac{5}{4})^2=\frac{35}{144}$,

故 X 的標準差為 $\sigma(X)=\sqrt{Var(X)}=\sqrt{\frac{35}{144}}=\frac{\sqrt{35}}{12}$（顆）.

11.某電視臺舉辦抽獎遊戲，現場準備的抽獎箱裡放置了四個分別標有 1000、800、600、0 元獎額的球．參加者自行從抽獎箱裡摸取一球（取後即放回），主辦單位即贈送與此球上數字等額的獎金，並規定抽取到 0 元的人可以再摸一次，但是所得獎金折半（若再摸到 0 就沒有第三次機會）．試問一個參加者可得獎金的期望值是多少元?

解答 675 元

解析 由題意知，參加者自抽獎箱摸取一球，情形可分為摸球 1 次和摸球 2 次，令隨機變數 X 為所得的獎金，X 的取值與機率分布如下：

其機率與對應的獎金如下：

情形	摸 1 次 額 1000	摸 1 次 額 800	摸 1 次 額 600	摸 2 次 (0,1000)	摸 2 次 (0,800)	摸 2 次 (0,600)	摸 2 次 (0,0)
X	1000	800	600	500	400	300	0
P	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4\times4}$	$\frac{1}{4\times4}$	$\frac{1}{4\times4}$	$\frac{1}{4\times4}$

故參加者可得獎金的期望值為

$$E(X)=(1000+800+600)\times\frac{1}{4}+(500+400+300+0)\times\frac{1}{4\times4}=675\text{（元）}.$$