

第 1 章 機率與統計



1-5 抽樣與統計推論

1. 某班 40 位同學，月考數學成績平均為 70 分，標準差為 5 分。若成績為常態分配，則

(1) 成績在 65 到 75 分之間者約有多少人？

(2) 成績在 60 到 80 分之間者約有多少人？

解 (1) 65 到 75 分為距平均數 1 個標準差的地方，約有 68% 的成績落在此區間內，即約有

$$40 \times \frac{68}{100} = 27.2 \approx 27 \text{ (人) .}$$

(2) 在 60 到 80 分為距平均數 2 個標準差的地方，約有 95% 的成績落在此區間內，即約有

$$40 \times \frac{95}{100} = 38 \text{ (人) .}$$

2. 某校有學生 1000 位，某次數學段考成績呈常態分布，平均成績 72 分，標準差 12 分。

(1) 此次數學段考不及格（60 分以下）的學生約有幾位？

(2) 成績超過 96 分的約有幾位？

(3) 某生成績 84 分，他在全校大約排第幾名？

解 (1) 成績呈平均 72 分，標準差 12 分的常態分布，60 分在平均數以下 1 個標準差的地方，由常態分布規律，約有 68% 的成績在區間 $[72-12, 72+12] = [60, 84]$ 之間。也就是成績落在 60 分以下及 84 分以上合占 32%，由對稱性知 60 分以下與 84 分以上各占 16%，也就是大約有 160 位數學成績不及格。

(2) 成績落在區間 $[72-2 \times 12, 72+2 \times 12]$ 者約占 95%，也就是大約有 5% 的學生成績在 48 分以下或 96 分以上，由對稱性知成績在 96 分以上者約占 2.5%，也就是大約有 25 位學生成績在 96 分以上。

(3) 成績 84 分為平均數以上 1 個標準差的地方，由(1)的討論知他大約排在第 160 名左右。

3. 丟二枚均勻硬幣 300 次，以隨機變數 Y 表示出現 2 個正面的比率。

- (1) 求 Y 的期望值和標準差。
 (2) 試估計約 95% 的比率 Y 所在的區間。

解 (1) 丟二枚公正硬幣時，出現 2 個正面的機率為 $p = \frac{1}{4}$ 。

隨機變數 Y 表示出現 2 個正面的比率，則期望值與標準差為

$$E(Y) = p = \frac{1}{4}, \quad \sigma(Y) = \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} = \sqrt{\frac{\frac{1}{4} \times \frac{3}{4}}{300}} = \frac{1}{40}.$$

(2) 約有 95% 的比率 Y 所在區間為

$$\begin{aligned} \left[p - 2\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}, p + 2\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} \right] &= \left[\frac{1}{4} - 2 \times \frac{1}{40}, \frac{1}{4} + 2 \times \frac{1}{40} \right] \\ &= \left[\frac{4}{40}, \frac{6}{40} \right] = [0.2, 0.3]. \end{aligned}$$

4. 某社團將進行社長選拔，候選人阿美的支持團隊所做民意調查發現：阿美的支持度為 55%，接受調查的有效樣本為 99 人。

- (1) 求在 95% 的信心水準下，此抽樣的誤差。
 (2) 求阿美所獲支持率的 95% 信賴區間。

解 (1) 在 95% 的信心水準下，誤差是

$$2\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} = 2\sqrt{\frac{0.55 \times (1-0.55)}{99}} = 2 \times 0.05 = 0.1.$$

此抽樣的誤差為 10%。

(2) 95% 信賴區間為 $[0.55 - 0.1, 0.55 + 0.1] = [0.45, 0.65]$ 。

5. 從臺北市隨機抽樣 400 人，詢問是否贊成週休 3 日制，結果有 256 人贊成，求臺北市對週休 3 日制的贊成比率及 95% 的信賴區間。

解 贊成比率 $\frac{256}{400} = 0.64$ 。

$$\text{誤差為 } 2\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} = 2\sqrt{\frac{0.64 \times (1-0.64)}{400}} = 2 \times 0.024 = 0.048.$$

故 95% 的信賴區間為 $[0.64 - 0.048, 0.64 + 0.048] = [0.592, 0.688]$ 。

6. 某縣縣長施政滿意度的調查報導如下：

「滿意度為六成，本次調查共成功訪問該縣 600 位成年民眾，在 95% 的信心水準下，抽樣誤差為正負 4 個百分點。」

- (1) 這項調查的母體是什麼？樣本數為多少？
- (2) 受訪者中對縣長施政滿意者約有多少人？
- (3) 算出這次調查的信賴區間。

解

- (1) 母體是該縣成年民眾，抽出的樣本有 600 個。
- (2) 在 600 位受訪者當中，滿意度為六成，即回答滿意者約有

$$600 \times \frac{60}{100} = 360 \text{ (人)} .$$

- (3) 在 95% 的信心水準下，抽樣誤差為 4 個百分點。
信賴區間為 $[0.6 - 0.04, 0.6 + 0.04] = [0.56, 0.64]$ 。

7. 某男校學務處進行「是否贊成招收女生」的意見調查，結果回收有效問卷 1600 張，其中贊成者 1280 張。

- (1) 求贊成比例。
- (2) 在 95% 的信心水準下，這次調查的誤差是多少個百分點？
- (3) 計算 95% 的信賴區間。

解

- (1) 在 1600 張問卷中，有 1280 張表示贊成，贊成率為

$$\hat{p} = \frac{1280}{1600} = 0.8 .$$

- (2) 在 95% 的信心水準下，誤差是

$$2 \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} = 2 \sqrt{\frac{0.8 \times (1-0.8)}{1600}} = 2 \times 0.01 = 0.02 .$$

- (3) 95% 信賴區間為 $[0.8 - 0.02, 0.8 + 0.02] = [0.78, 0.82]$ 。

8. 食品檢驗單位對傳言的問題魚類發表檢驗結果如下：

「我們有 95% 的信心認為此魚類合格率在 56% 到 64% 之間」。

試求此檢驗中，共檢驗了多少魚類樣本？

解 設共檢驗了 n 個魚類樣本。

因為 56% 到 64% 的機率可以表為 $60\% \pm 4\%$ ，所以此魚類合格機率 $\hat{p} = 60\%$ ，誤差 4 個百分點。由公式得到

$$2\sqrt{\frac{0.6(1-0.6)}{n}} = 0.04 \Rightarrow n = 600 .$$

故共檢驗了魚類樣本 600 個。

9. 某人丟一個硬幣，宣稱「我有 95% 的信心認為此硬幣出現正面的機率為 45% 到 55% 之間」。求

(1) 誤差範圍是多少個百分點？

(2) 此試驗中此人共丟硬幣幾次？其中硬幣出現正面幾次？

解 (1) 因為 45% 到 55% 的機率可以表為 $50\% \pm 5\%$ ，所以出現正面機率 $\hat{p} = 50\%$ ，誤差為 5 個百分點。

(2) 由公式得到

$$2\sqrt{\frac{0.5(1-0.5)}{n}} = 0.05 \Rightarrow n = 400 . \text{ 又 } 400 \times \frac{50}{100} = 200 \text{ (次)} .$$

故共丟硬幣 400 次，其中硬幣出現正面 200 次。

10. 若比率 \hat{p} 的 95% 的信賴區間為 $[0.52, 0.58]$ ，求 \hat{p} 的 99.7% 信賴區間。

解 設標準差 $\hat{\sigma} = \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}$ ，

95% 的信賴區間 $[\hat{p} - 2\hat{\sigma}, \hat{p} + 2\hat{\sigma}] = [0.52, 0.58]$ ，

得 $\hat{p} = \frac{0.52+0.58}{2} = 0.55$ ，且 $2\hat{\sigma} = 0.03$ 。

99.7% 的信賴區間為

$[\hat{p} - 3\hat{\sigma}, \hat{p} + 3\hat{\sigma}] = [0.55 - \frac{3}{2} \times 0.03, 0.55 + \frac{3}{2} \times 0.03] = [0.505, 0.595]$ 。