第 1 章　機率與統計

1-3　獨立事件

1.　投擲一均勻硬幣 2 次，若 A 表示第一次出現正面的事件，B 表示第二次出現反面的事件，C 表示兩次為同一面的事件，下列各組何者互為獨立事件？
(1)事件 A 與 B　(2)事件 B 與 C　(3)事件 A 與 C　(4)事件 A,B,C .

解　樣本空間 $S=$ {(正，正)，(正，反)，(反，正)，(反，反)}，
$A=$ {(正，正)，(正，反)}，$B=$ {(正，反)，(反，反)}，
$C=$ {(正，正)，(反，反)}，
故 $A\cap B=$ {(正，反)}，$B\cap C=$ {(反，反)}，$A\cap C=$ {(正，正)}

(1) $P(A\cap B)=\frac{1}{4}=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=P(A)P(B)$，事件 A 與 B 獨立 .

(2) $P(B\cap C)=\frac{1}{4}=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=P(B)P(C)$，事件 B 與 C 獨立 .

(3) $P(C\cap A)=\frac{1}{4}=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=P(A)P(C)$，事件 A 與 C 獨立 .

(4) $A\cap B\cap C=\varnothing$，得 $P(A\cap B\cap C)=0$，

但 $P(A)P(B)P(C)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{8}\neq P(A\cap B\cap C)$，

故 A,B,C 不是獨立事件 .

答案為(1)(2)(3) .

2.　設 $P(A)=\frac{1}{2}$，$P(A\cup B)=\frac{3}{5}$.
(1)若 A、B 為互斥事件，求 $P(B)$.　(2)若 A、B 為獨立事件，求 $P(B)$.

解　(1)因為 A、B 為互斥事件，$A\cap B=\varnothing$，$P(A\cap B)=0$，

由 $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$，得 $\frac{3}{5}=\frac{1}{2}+P(B)-0$，解得 $P(B)=\frac{1}{10}$.

(2)因為 A、B 為獨立事件，$P(A\cap B)=P(A)P(B)$，

由 $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$，得 $\frac{3}{5}=\frac{1}{2}+P(B)-\frac{1}{2}P(B)$，

即 $\frac{1}{2}P(B)=\frac{1}{10}$， 故 $P(B)=\frac{1}{5}$ ．

3. 設 A、 B、 C 為獨立事件，若 $P(A)=\frac{1}{3},P(B)=\frac{2}{5},P(C)=\frac{3}{4}$， 求

(1) $P(A\cap B\cap C)$ (2) $P(A\cup B\cup C)$ ．

解 (1) $P(A\cap B\cap C)=P(A)P(B)P(C)=\frac{1}{3}\times\frac{2}{5}\times\frac{3}{4}=\frac{1}{10}$ ．

(2) $P(A\cup B\cup C)=1-P(A'\cap B'\cap C')=1-P(A')P(B')P(C')$

$$=1-\frac{2}{3}\times\frac{3}{5}\times\frac{1}{4}=1-\frac{1}{10}=\frac{9}{10}$$ ．

4. 已知 A,B,C 為獨立事件且 $P(A\cup B\cup C)=\frac{5}{6}$， $P(A)=\frac{2}{3}$， $P(B)=\frac{1}{4}$， 求 $P(C)$ ．

解 設 $P(C)=x$， 因為

$P(A\cup B\cup C)=P(A)+P(B)+P(C)-P(A\cap B)-P(B\cap C)-P(A\cap C)+P(A\cap B\cap C)$

且 A,B,C 為獨立事件，所以

$$\frac{5}{6}=\frac{2}{3}+\frac{1}{4}+x-\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{4}-\frac{1}{4}x-\frac{2}{3}x+\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{4}x$$

解得 $x=\frac{1}{3}$ ．

5. 設甲，乙，丙三人投籃命中率分別為 $\frac{4}{5}$，$\frac{1}{2}$，$\frac{7}{10}$，個人投籃命中與否為獨立事件．今三人各投一球，求

(1) 三人都命中的機率　　(2) 恰有兩人命中的機率．

解 (1)設甲，乙，丙個人命中的事件分別為 A,B,C，

則三人都命中的機率為

$$P(A\cap B\cap C)=P(A)P(B)P(C)=\frac{4}{5}\times\frac{1}{2}\times\frac{7}{10}=\frac{7}{25}\ .$$

(2)恰有兩人命中的機率為

$$P(A\cap B\cap C')+P(A\cap B'\cap C)+P(A'\cap B\cap C)$$

$$=\frac{4}{5}\times\frac{1}{2}\times\frac{3}{10}+\frac{4}{5}\times\frac{1}{2}\times\frac{7}{10}+\frac{1}{5}\times\frac{1}{2}\times\frac{7}{10}=\frac{47}{100}\ .$$

6. 甲、乙、丙三位選手比賽乒乓球，由過去經驗知：甲贏乙的機率是 $\frac{3}{4}$，乙贏丙的機率是 $\frac{2}{3}$，甲贏丙的機率是 $\frac{1}{2}$．設各場比賽勝負是獨立的，而且每位選手要贏另外 2 人才得冠軍．問：甲、乙、丙得冠軍的機率分別是多少？

解 甲得冠軍的情形是甲贏乙且甲贏丙，$P(\text{甲})=\frac{3}{4}\times\frac{1}{2}=\frac{3}{8}$，

乙得冠軍的情形是乙贏丙且乙贏甲，$P(\text{乙})=\frac{2}{3}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{6}$，

丙得冠軍的情形是丙贏甲且丙贏乙，$P(\text{丙})=\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{6}$ ．

7.　某公司男女員工在主管與非主管的人數統計資料如下：

	主管	非主管	合計
男性	12	48	60
女性	8	32	40
合計	20	80	100

試判斷該公司性別與主管職務是否為獨立事件？

解　設 A 表員工為男性的事件，$P(A)=\dfrac{60}{100}$，

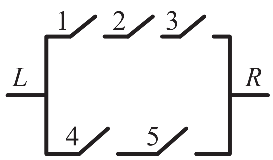
B 表員工為主管的事件，$P(B)=\dfrac{20}{100}$，

$A\cap B$ 表員工為男性且為主管的事件，$P(A\cap B)=\dfrac{12}{100}$，

因為 $\dfrac{60}{100}\times\dfrac{20}{100}=\dfrac{12}{100}$，即 $P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B)$，

所以 A 與 B 為獨立事件．

8.　右方電路圖中有 5 個開關，電流通過各開關的機率均為 $\dfrac{1}{3}$，且各開關的操作獨立．求電流從左端流到右端的機率．



解　設 A 表電流從上方流通的事件，B 表電流從下方流通的事件，

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$$

$$=\left(\frac{1}{3}\right)^3+\left(\frac{1}{3}\right)^2-\left(\frac{1}{3}\right)^5=\frac{35}{243}\ .$$