第 1 章　機率與統計

1-1　隨機的意義

1.　下列隨機變數 X 的可能取值，何者為 $X=1,2,3,4$？

(1) 一盒中有 10 件樣品，其中 3 件為不良品，自盒中任取 4 件．令 X 表示取得不良品的件數．

(2) 甲乙丙丁 4 人同時猜拳，以「剪刀、石頭、布」決定勝負，令 X 表示得勝的人數．

(3) 自一副撲克牌中隨機取出 5 張，令 X 表示其中 A 點的張數．

(4) 擲一個骰子，令 X 表示擲出點數的正因數個數．

解　(1) X 表示取得不良品的件數，則 $X=0,1,2,3$．

(2) X 表示得勝的人數，則 $X=0,1,2,3$．

(3) X 表示其中 A 點的張數，則 $X=0,1,2,3,4$．

(4) X 表示擲出點數的正因數個數，各點數的正因數與 X 的取值如下：

擲出點數	正因數	X
1	1	1
2	1, 2	2
3	1, 3	2
4	1, 2, 4	3
5	1, 5	2
6	1, 2, 3, 6	4

答案為(4)．

2.　求下列隨機變數 X 的可能取值個數．

(1) 擲一公正的骰子 3 次，令 X 表示此 3 次的點數和．

(2) 投擲 10 顆公正骰子一次，令 X 表示其中最大的點數．

(3) 從 5 雙尺寸式樣與顏色均相同的鞋子中任選 6 隻，令 X 表示此 6 隻可配成的雙數．

(4) 自 $1,2,3,4,5$ 中取出三相異數字，令 X 表示此三數字所作成的三位數．

解

(1) X 表示此 3 次的點數和，$X=3,4,5,\ldots,18$．共 16 個．

(2) X 表示其中最大的點數，$X=1,2,3,4,5,6$．共 6 個．

(3) 5 雙鞋子中任選 6 隻，則 6 隻中至少可配成 1 雙，$X=1,2,3$．共 3 個．

(4) X 表示此三數字所作成的三位數，$P_3^5=5\times4\times3=60$（個）．

3.　設生男與生女的機會相等，一個家庭共有 4 個小孩，令 X 表示其中女孩的人數，下列何者正確？

(1) X 的所有可能取值為 $X=1,2,3,4$．

(2) $X=0$ 的機率為 0．

(3) $P(X=0)$ 與 $P(X=4)$ 相等．

(4) $P(X=1)$ 與 $P(X=3)$ 相等．

(5) $X=2$ 的機率最大．

解

(1) X 表示其中女孩的人數，X 的所有可能取值為 $0,1,2,3,4$．

(2) $X=0$ 表示有 0 個女孩，即全為男孩的事件，機率為 $\left(\frac{1}{2}\right)^4=\frac{1}{16}$．

(3) $P(X=0)=\left(\frac{1}{2}\right)^4=P(X=4)$．

(4) $P(X=1)=C_1^4\left(\frac{1}{2}\right)^1\left(\frac{1}{2}\right)^3=C_3^4\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right)^1=P(X=3)$．

(5) X 的取值與機率分布如下：

X	0	1	2	3	4
P	$\frac{1}{16}$	$\frac{4}{16}$	$\frac{6}{16}$	$\frac{4}{16}$	$\frac{1}{16}$

答案為(3)(4)(5)．

4. 擲一均勻的骰子 3 次，令隨機變數 X 表示 6 點出現的次數．求

(1) $P(X=0)$ (2) $P(X<2)$ (3) $P(X>3)$ ．

解 (1) $P(X=0)$ 表示 6 點出現次數為 0 的機率，

$$P(X=0)=\frac{5^3}{6^3}=\frac{125}{216}\text{ ．}$$

(2) $P(X<2)$ 表示 6 點出現次數小於 2 次的機率，

$$P(X<2)=P(X=0)+P(X=1)$$

$$=\left(\frac{5}{6}\right)^3+C_1^3\left(\frac{1}{6}\right)^1\left(\frac{5}{6}\right)^2=\frac{125}{216}+\frac{75}{216}=\frac{200}{216}=\frac{25}{27}\text{ ．}$$

(3) $P(X>3)$ 表示 6 點出現次數大於 3 次的機率，此為不可能事件，故 $P(X>3)=0$ ．

5. 已知一個不均勻的銅板，出現正面的機率為 $\frac{2}{3}$，出現反面的機率為 $\frac{1}{3}$，今丟此銅板五次，令隨機變數 X 表示正面出現的次數．

(1)求 X 的機率分布． (2)作 X 的機率質量函數圖．

解 (1) X 表示正面出現的次數，可能取值為 $X=0,1,2,3,4,5$ ．

$X=0$，表示正面出現 0 次，機率為 $\left(\frac{1}{3}\right)^5=\frac{1}{243}$；

$X=1$，表示出現 1 次正面 4 次反面，機率為 $C_1^5\left(\frac{2}{3}\right)^1\left(\frac{1}{3}\right)^4=\frac{10}{243}$；

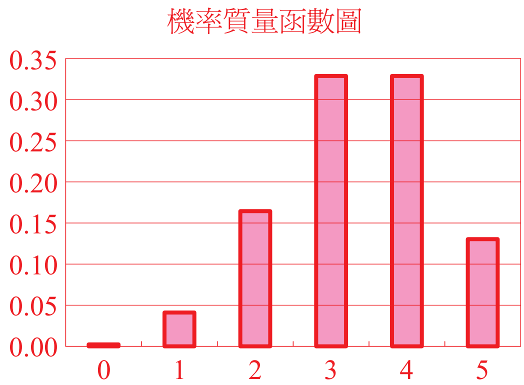
$P(X=2)=C_2^5\left(\frac{2}{3}\right)^2\left(\frac{1}{3}\right)^3=\frac{40}{243}$；$P(X=3)=C_3^5\left(\frac{2}{3}\right)^3\left(\frac{1}{3}\right)^2=\frac{80}{243}$；

$P(X=4)=C_4^5\left(\frac{2}{3}\right)^4\left(\frac{1}{3}\right)^1=\frac{80}{243}$；$P(X=5)=\left(\frac{2}{3}\right)^5=\frac{32}{243}$；

整理 X 的取值與機率分布如下：

X	0	1	2	3	4	5
P	$\frac{1}{243}$	$\frac{10}{243}$	$\frac{40}{243}$	$\frac{80}{243}$	$\frac{80}{243}$	$\frac{32}{243}$

(2)作 X 的機率質量函數圖如下：



6. 甲、乙、丙各出「剪刀、石頭、布」猜拳，令 X 表示得勝的人數，求
(1) $P(X=0)$　　(2) X 的機率分布．

解 (1) $P(X=0)$ 表示三人不分勝負的機率，可能三人出相同的拳或各出一種，

其機率 $P(X=0)=\dfrac{3+3!}{3^3}=\dfrac{9}{27}=\dfrac{1}{3}$ ．

(2) X 的取值與機率分布如下：

X	0	1	2
P	$\dfrac{1}{3}$	$\dfrac{C_1^3\cdot 3}{3^3}=\dfrac{1}{3}$	$\dfrac{C_2^3\cdot 3}{3^3}=\dfrac{1}{3}$

7. 一盒中有 10 件樣品，其中 3 件為不良品，自盒中任取 4 件．令 X 表示取得不良品的件數．求 X 的機率分布．

解 X 的取值為 $X=0,1,2,3$ ．

$X=0$ 表示無不良品的事件，$P(X=0)=\dfrac{C_4^7}{C_4^{10}}=\dfrac{1}{6}$，

$X=1$ 表示取到 1 件不良品的事件，$P(X=1)=\dfrac{C_1^3\cdot C_3^7}{C_4^{10}}=\dfrac{1}{2}$，

$X=2$ 表示取到 2 件不良品的事件，$P(X=2)=\dfrac{C_2^3\cdot C_2^7}{C_4^{10}}=\dfrac{3}{10}$，

$X=3$ 表示取到 3 件不良品的事件，$P(X=3)=\dfrac{C_3^3\cdot C_1^7}{C_4^{10}}=\dfrac{1}{30}$，

X 的機率分布如下：

X	0	1	2	3
P	$\dfrac{1}{6}$	$\dfrac{1}{2}$	$\dfrac{3}{10}$	$\dfrac{1}{30}$

8. 袋中有 3 白球，2 紅球，4 黑球，從中取出 3 球，設 X 表示所取出球的顏色種類．求 X 的機率分布．

解 X 的取值為 $X=1$，2，3．

$X=1$ 表示 3 球同色的事件，$P(X=1)=\dfrac{C_3^3+C_3^4}{C_3^9}=\dfrac{5}{84}$，

$X=2$ 表示 3 球中有 2 球同色的事件，$P(X=2)=\dfrac{C_2^3\cdot 6+C_2^2\cdot 7+C_2^4\cdot 5}{C_3^9}=\dfrac{55}{84}$，

$X=3$ 表示 3 球異色（各取 1 個）的事件，$P(X=3)=\dfrac{C_1^3\cdot C_1^2\cdot C_1^4}{C_3^9}=\dfrac{24}{84}=\dfrac{2}{7}$，

X 的機率分布如下：

X	1	2	3
P	$\dfrac{5}{84}$	$\dfrac{55}{84}$	$\dfrac{2}{7}$