



建議配分

1~6 題每題 12 分，7~8 題每題 14 分。

1. 已知 $C_{r+5}^{20} = C_{3r-1}^{20}$ ，求正整數 r 的值。

解 ▶ 因為 $C_{r+5}^{20} = C_{3r-1}^{20}$ ，所以 $r+5 = 3r-1$ 或 $(r+5) + (3r-1) = 20$
解得 $r = 3$ 或 4 。

2. 某次考試共有 10 個題目，規定從這 10 題中選做 8 題。

(1) 共有多少種選法？

(2) 若前 3 題一定要全做，則共有多少種選法？

解 ▶ (1) 選法有 $C_8^{10} = 45$ (種)。

(2) 因為前 3 題一定要全做，所以相當於從另 7 題選做 5 題。
故選法共有 $C_5^7 = 21$ (種)。

3. 從一列有10節車廂的電車中，選出3節車廂為自由座。
- (1) 共有多少種選法？
- (2) 若第一節車廂或最後一節車廂至少有一節車廂為自由座，則共有多少種選法？

解► (1) 選法共有 $C_3^{10} = 120$ (種)。

(2) 分二類：

① 頭尾2節恰1節自由座：選法有 $C_1^2 \times C_2^8 = 2 \times 28 = 56$ (種)。

② 頭尾2節都是自由座：選法有 $C_2^2 \times C_1^8 = 1 \times 8 = 8$ (種)。

根據加法原理，得選法共有 $56 + 8 = 64$ (種)。

4. 從6本不同的課本和5本不同的講義中，任選4本。
- 問：既有課本又有講義的選法共有多少種？

解► 分三類：

(1) 1本課本3本講義：選法有 $C_1^6 \times C_3^5 = 6 \times 10 = 60$ (種)。

(2) 2本課本2本講義：選法有 $C_2^6 \times C_2^5 = 15 \times 10 = 150$ (種)。

(3) 3本課本1本講義：選法有 $C_3^6 \times C_1^5 = 20 \times 5 = 100$ (種)。

根據加法原理，得共有 $60 + 150 + 100 = 310$ (種) 選法。

〈另解〉(任意選取) - (4本課本) - (4本講義)

$$= C_4^{11} - C_4^6 - C_4^5 = 330 - 15 - 5 = 310 \text{ (種)}。$$

5. 將 6 本不同的書依下列情形分配，方法各有多少種？

(1) 分給甲、乙、丙 3 人，每人各得 2 本。

(2) 分裝入 3 個相同的袋子，每袋裝 2 本。

解► (1) 從 6 本中取出 2 本給甲，取法有 C_2^6 種；再從其餘的 4 本取出 2 本給乙，取法有 C_2^4 種；剩下的 2 本給丙，取法有 C_2^2 種。

故分法共有 $C_2^6 \times C_2^4 \times C_2^2 = 15 \times 6 \times 1 = 90$ (種)。

(2) 先假設袋子是不同的，並依序作甲，乙，丙的記號，則有 $C_2^6 C_2^4 C_2^2$ 種分法，但事實上袋子是相同的，因此每 3! 種只能算 1 種。

故分法共有 $C_2^6 \times C_2^4 \times C_2^2 \times \frac{1}{3!} = 90 \times \frac{1}{6} = 15$ 種分法。

6. 從「series」一字的 6 個字母中，任意選取 4 個排成一列，共有多少種排法？

解► 「series」一字共有二個 s，二個 e，一個 r，一個 i。

分三類：

(1) 二同二同：就是 s, s, e, e 排一列，排法共有 $\frac{4!}{2!2!} = 6$ (種)。

(2) 二同二異：從 s, e 中選 1 種字母，並出 2 個，再從剩下 3 種字母中選 2 種，並各出 1 個，排一列，排法共有 $C_1^2 \times C_2^3 \times \frac{4!}{2!} = 72$ (種)。

(3) 四異：從 s, e, r, i 中選 4 種，並各出 1 個，再排一列，排法共有 $C_4^4 \times 4! = 24$ (種)。

由加法原理，得排法共有 $6 + 72 + 24 = 102$ (種)。

7. 已知 $\left(ax^2 + \frac{1}{x}\right)^5$ 展開式中 x^4 的係數為 80，求實數 a 的值。

解 ▶ 由二項式定理，知展開式中的每一項皆形如 $C_r^5 (ax^2)^{5-r} \left(\frac{1}{x}\right)^r = C_r^5 a^{5-r} x^{10-3r}$ ，

當 $10-3r=4$ ，即 $r=2$ 時， x^4 項為 $C_2^5 a^3 x^4 = 10a^3 x^4$ 。

因此， $10a^3 = 80$ 。解得 $a = 2$ 。

8. 求滿足不等式 $2000 < C_1^n + C_2^n + C_3^n + \cdots + C_n^n < 3000$ 的正整數 n 。

解 ▶ 因為 $C_0^n + C_1^n + C_2^n + C_3^n + \cdots + C_n^n = 2^n$ ，所以 $C_1^n + C_2^n + C_3^n + \cdots + C_n^n = 2^n - C_0^n = 2^n - 1$ 。

因此，原式可改寫為 $2000 < 2^n - 1 < 3000 \Rightarrow 2001 < 2^n < 3001$ 。

又因為 $2^{10} = 1024$ ， $2^{11} = 2048$ ， $2^{12} = 4096$ ，所以 $n = 11$ 。