



建議配分

每題 10 分。

1. 已知 $4P_3^n = 5P_3^{n-1}$ ，求正整數 n 的值。

解 ▶ $4P_3^n = 5P_3^{n-1} \Rightarrow 4n(n-1)(n-2) = 5(n-1)(n-2)(n-3)$
 $\Rightarrow 4n = 5(n-3)$ (因為 $n-1 \geq 3$ ，即 $n \geq 4$)
 $\Rightarrow n = 15$ 。

2. 已知獨唱比賽共有 7 人報名參加，求共有多少種出賽順序？

解 ▶ 因為 7 人的出賽順序，可視作參賽者排成一列的情形，
所以共有 $P_7^7 = 7! = 5040$ 種出賽順序。

3. 老師想從10個同學中，指派3人分別擔任主席、司儀及記錄，共有多少種指派方案？

解▶ 指派方案共有 $P_3^{10} = \frac{10!}{7!} = 10 \times 9 \times 8 = 720$ (種)。

4. 晚會有3個歌唱節目及3個舞蹈節目要安排，依下列各條件，求節目安排的方案各有多少種：

- (1)歌唱節目及舞蹈節目相間隔排列。
(2)歌唱節目及舞蹈節目各自排在一起。

解▶ (1) 分二類：

- ① 歌舞歌舞歌舞。
② 舞歌舞歌舞歌。

因為在每一類中，將3個歌唱節目排入有 $3! = 6$ 種排法，3個舞蹈節目排入有 $3! = 6$ 種排法，所以方案共有 $2 \times 6 \times 6 = 72$ (種)。

- (2) 歌唱節目及舞蹈節目要各自排在一起，如下圖所示：

歌歌歌 舞舞舞

將3個歌唱節目看成「1」個，3個舞蹈節目看成「1」個，有 $2! = 2$ 種排法；又3個歌唱節目之間有 $3! = 6$ 種排法，3個舞蹈節目之間有 $3! = 6$ 種排法。故方案共有 $2 \times 6 \times 6 = 72$ (種)。

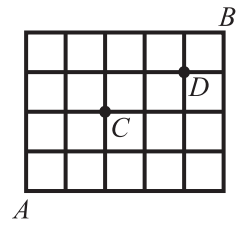
5. 若甲乙丙丁戊共 5 人排成一列，則甲不排首位且乙不排末位的排法共有多少種？

$$\begin{aligned}
 \text{解} \rightarrow \text{所求} &= \text{任意排} - (\text{甲排首位} \cup \text{乙排末位}) \\
 &= \text{任意排} - (\text{甲排首位} + \text{乙排末位} - \text{甲排首位} \cap \text{乙排末位}) \\
 &= 5! - (4! + 4! - 3!) \\
 &= 78 \text{ (種)}.
 \end{aligned}$$

6. 由六個數字 0, 0, 0, 1, 1, 2 排成的六位數，共有多少個？

$$\begin{aligned}
 \text{解} \rightarrow \text{所求} &= \text{任意排} - 0 \text{ 排首位} \\
 &= \frac{6!}{3!2!1!} - \frac{5!}{2!2!1!} \\
 &= 60 - 30 = 30 \text{ (個)}.
 \end{aligned}$$

7. 在右圖的棋盤街道中，從 A 到 B 走捷徑，求下列情形各有多少種走法？
- (1) 任意走捷徑。
 - (2) 經 C 點且經 D 點。
 - (3) 經 C 點或經 D 點。



解► (1) 任意走捷徑的方法共有 $\frac{9!}{5!4!} = 126$ (種)。

(2) 經 C 點且經 D 點走捷徑的方法共有

$$\frac{4!}{2!2!} \times \frac{3!}{2!1!} \times \frac{2!}{1!1!} = 36 \text{ (種)}。$$

(3) 設 S 為所有經 C 點的捷徑組成的集合，
 T 為所有經 D 點的捷徑組成的集合。

經 C 點或經 D 點走捷徑的方法共有

$$\begin{aligned} n(S \cup T) &= n(S) + n(T) - n(S \cap T) \\ &= \frac{4!}{2!2!} \times \frac{5!}{3!2!} + \frac{7!}{4!3!} \times \frac{2!}{1!1!} - 36 \\ &= 60 + 70 - 36 = 94 \text{ (種)}。 \end{aligned}$$

8. 小華每逢週日都是從羽球、桌球與籃球等 3 種球類運動選一種做運動，求這個月的 4 個週日共有多少種不同的運動安排。

解► 因為每周日都有 3 種選擇，

所以 4 個週日的安排共有 $3 \times 3 \times 3 \times 3 = 3^4 = 81$ (種)。

9. 由 0, 1, 2, 3, 4 共五個數字組成的三位數中，下列各情形共有多少個偶數？

(1) 數字不可重複。

(2) 數字可以重複。

解► (1) 因為偶數的個位數必為偶數，所以分成三類：

① $\square \square 0$ ：有 $4 \times 3 = 12$ 個。

② $\square \square 2$ ：有 $3 \times 3 = 9$ 個。

③ $\square \square 4$ ：有 $3 \times 3 = 9$ 個。

由加法原理，得偶數共有 $12 + 9 + 9 = 30$ (個)。

(2) 因為偶數的個位數必為偶數，所以分成三類：

① $\square \square 0$ ：有 $4 \times 5 = 20$ 個。

② $\square \square 2$ ：有 $4 \times 5 = 20$ 個。

③ $\square \square 4$ ：有 $4 \times 5 = 20$ 個。

由加法原理，得共有 $20 + 20 + 20 = 60$ (個)。

10. 有一樓梯共有 8 階，今有一人上樓，若每步走一階或二階，則共有多少種上樓的方法？

解► 設走一階 x 次，走二階 y 次。依題意，得 $x + 2y = 8$ ，

其中 x, y 為非負整數。 x, y 的解有以下 5 組解：

x	0	2	4	6	8
y	4	3	2	1	0

因此，上樓的方法共有

$$\frac{4!}{0!4!} + \frac{5!}{2!3!} + \frac{6!}{4!2!} + \frac{7!}{6!1!} + \frac{8!}{8!0!} = 1 + 10 + 15 + 7 + 1 = 34 \text{ (種)}。$$