單元 2 級數

建議配分 每題 10 分。

1. 已知一等差數列前 3 項和為 9，前 9 項和為 81，求其前 6 項的和。

解▸ 設此等差數列為 $\langle a_n \rangle$，且首項為 a，公差為 d，依題意得

$a_1 + a_2 + a_3 = 3a + 3d = 9$，

$a_1 + a_2 + \cdots + a_9 = 9a + (d + 2d + \cdots + 8d) = 9a + 36d = 81$，

解得 $a = 1$，$d = 2$。

前 6 項和為 $a_1 + a_2 + \cdots + a_6 = 6a + (d + 2d + \cdots + 5d) = 6a + 15d = 36$。

2. 已知一等差數列共有 19 項，其公差 $d > 0$，且 $a_1 + a_{19} = 0$，選出正確的選項。

(1) $a_1 < 0$　(2) $a_{11} > 0$　(3) $a_9 + a_{10} + a_{11} = 0$　(4) $a_3 + a_{15} > 0$。

解▸ 因為公差 $d > 0$，所以數列中的每一項會越來越大。

(1) 因為 $a_1 < a_{19}$，又 $a_1 + a_{19} = 0$，所以 $a_1 < 0$。

(2) $a_{10} = a_1 + 9d = a_{19} - 9d$，可知 $a_1 + a_{19} = 2a_{10}$，即 $a_{10} = 0$。

因為 $a_{10} < a_{11}$，所以 $a_{11} > 0$。

(3) $a_9 + a_{10} + a_{11} = (a_{10} - d) + a_{10} + (a_{10} + d) = 3a_{10} = 0$。

(4) $a_3 + a_{15} = (a_{10} - 7d) + (a_{10} + 5d) = 2a_{10} - 2d = -2d < 0$。

由上面的討論可知：正確的選項為(1)(2)(3)。

3. 設$\langle a_n \rangle$是一個首項為 3，公比為$\frac{1}{2}$的等比數列，且$S_8 = a_1 + a_2 + \cdots + a_8$。選出正確的選項。

(1) $3 < S_8 < 4$　　(2) $4 < S_8 < 5$　　(3) $5 < S_8 < 6$　　(4) $6 < S_8 < 7$。

解▸ 因為$S_8 = a_1 + a_2 + \cdots + a_8 = \dfrac{3\left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^8\right)}{1 - \frac{1}{2}} = 6\left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^8\right) = 6 - \dfrac{6}{2^8}$，

所以$5 < S_8 < 6$。

故選(3)。

4. 設等比數列$\langle a_n \rangle$的前n項和為S_n，且$S_2 = 5$，$S_4 = 20$，求S_6的值。

解▸ 設等比數列$\langle a_n \rangle$的首項為a，公比為r，由題意可得

$S_2 = a + ar$，

$S_4 = a + ar + ar^2 + ar^3 = (a + ar) + r^2(a + ar) = S_2 + r^2 S_2 = S_2(1 + r^2)$，

因此，$20 = 5 \times (1 + r^2)$，解得$r^2 = 3$。

$S_6 = a + ar + ar^2 + ar^3 + ar^4 + ar^5 = (a + ar) + r^2(a + ar) + r^4(a + ar)$

$= S_2 + r^2 S_2 + r^4 S_2 = S_2(1 + r^2 + r^4) = 5 \times (1 + 3 + 9) = 65$。

5. 求 $(1+2)+(2+4)+(3+8)+\cdots+(k+2^k)+\cdots+(10+2^{10})$ 的值。

解▶ $1+2+3+\cdots+10=\dfrac{10\times 11}{2}=55$，$2+2^2+2^3+\cdots+2^{10}=\dfrac{2\times(2^{10}-1)}{2-1}=2046$，

$55+2046=2101$。

6. 已知數列 $\langle a_n\rangle$ 的前 n 項和 $S_n=a_1+a_2+\cdots+a_n=2^n+n^2$，求 a_{10} 的值。

解▶ $S_{10}=a_1+a_2+\cdots+a_9+a_{10}=2^{10}+10^2=1124$，

$S_9=a_1+a_2+\cdots+a_9=2^9+9^2=512+81=593$，

$a_{10}=S_{10}-S_9=1124-593=531$。

7. 已知數列$\langle a_n \rangle$的前n項和$S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n = n^2 - 11n$。選出正確的選項。

(1) $a_1 < 0$　　(2) $a_7 < 0$　　(3) $\langle a_n \rangle$是等差數列　　(4) $a_{111} - a_{110} = 2$。

解▸ 由題意可知：

當$n \geq 2$時，$a_n = S_n - S_{n-1} = \left(n^2 - 11n\right) - \left((n-1)^2 - 11(n-1)\right) = 2n - 12$，

又當$n = 1$時，$a_1 = S_1 = 1 - 11 = -10 = 2 \times 1 - 12$。

因此由上面的討論可知：$a_n = 2n - 12 = -10 + (n-1) \times 2$，

即數列$\langle a_n \rangle$是首項為-10，公差為2的等差數列。

(1) $a_1 = -10 < 0$。

(2) $a_7 = 14 - 12 = 2 > 0$。

(3) $\langle a_n \rangle$是等差數列。

(4) 數列公差為2，即$a_{111} - a_{110} = 2$。

由上面的討論可知：正確的選項為(1)(3)(4)。

8. (1)已知$100^2 - 99^2 = 100 + k$，利用乘法公式求k的值。

(2)求$100^2 - 99^2 + 98^2 - 97^2 + \cdots + 2^2 - 1^2$的值。

解▸ (1) 因為$100^2 - 99^2 = (100 + 99)(100 - 99) = 100 + 99$，所以$k = 99$。

(2) 由(1)可得

$98^2 - 97^2 = (98 + 97)(98 - 97) = 98 + 97$，…，$2^2 - 1^2 = (2 + 1)(2 - 1) = 2 + 1$，

原式$= 100 + 99 + 98 + 97 + \cdots + 2 + 1 = \dfrac{100 \times 101}{2} = 5050$。

9. 求下列各級數的和：

(1) $2^2+4^2+\cdots+20^2$ 。

(2) $11^3+12^3+\cdots+20^3$ 。

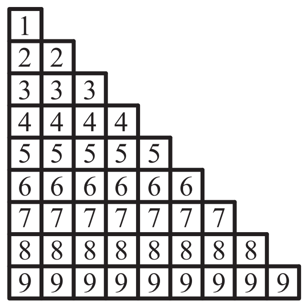
解▸ (1) $2^2+4^2+\cdots+20^2=4\times\left(1^2+2^2+\cdots+10^2\right)=4\times\dfrac{10\times11\times21}{6}=1540$ 。

(2) $11^3+12^3+\cdots+20^3=\left(1^3+2^3+\cdots+20^3\right)-\left(1^3+2^3+\cdots+10^3\right)$

$$=\left(\frac{20\times(20+1)}{2}\right)^2-\left(\frac{10\times(10+1)}{2}\right)^2$$

$$=44100-3025=41075$$ 。

10. 將數字有規律的排列如右圖，求右圖中所有數字的和。



解▸ 觀察圖形可得所有數字的和

$=1\times1+2\times2+\cdots+9\times9$

$=\dfrac{9\times10\times19}{6}=285$ 。