

1. 以下各小題對的打「O」，錯的打「×」：

___(1) 袋中有大小相同紅、白兩種球各若干顆，從中取出一球，取到紅球的機率為 $\frac{1}{2}$

___(2) 同時擲兩粒公正骰子一次，出現點數和為 11 的機率為 $\frac{1}{36}$

___(3) 擲一粒公正骰子二次，至少出現一次 6 點的機率為 $1 - \frac{25}{36}$

解：(1) ×：因為不知紅、白兩種球的數量，所以無法確認紅球的機率

(2) ×：因為點數和為 11 事件的樣本點有(5, 6)和(6, 5)兩個，所以機率為 $\frac{2}{36}$

(3) O：因為都不出現 6 點的機率為 $\frac{5 \times 5}{6 \times 6}$ ，所以至少出現一次 6 點的機率為 $1 - \frac{25}{36}$

2. 一對夫婦計劃生育兩個小孩，現依小孩出生的次序討論其可能的性別，分別寫出：

(1) 樣本空間 (2) 兩個小孩中有女孩的事件 (3) 兩個小孩恰為一男一女的事件

解：(1) 樣本空間 $S = \{(\text{男}, \text{男}), (\text{男}, \text{女}), (\text{女}, \text{男}), (\text{女}, \text{女})\}$

(2) 事件為 $\{(\text{男}, \text{女}), (\text{女}, \text{男}), (\text{女}, \text{女})\}$

(3) 事件 $\{(\text{男}, \text{女}), (\text{女}, \text{男})\}$

3. 丟一枚硬幣三次，觀察每次出現的是正面或反面。令 A 表示至少有一次正面的事件， B 表示第二次是反面的事件。

試以集合表示下列各事件：

(1) 事件 A 和 B 都發生 (2) 事件 A 不發生 (3) 事件 A 發生但事件 B 不發生

解：(1) 即表示至少有一次正面且第二次是反面，事件為 $\{(\text{正}, \text{反}, \text{正}), (\text{正}, \text{反}, \text{反}), (\text{反}, \text{反}, \text{正})\}$

(2) 即表示一次正面也沒有的事件，事件為 $\{(\text{反}, \text{反}, \text{反})\}$

(3) 即表示至少有一次正面且第二次是正面，事件為 $\{(\text{正}, \text{正}, \text{正}), (\text{正}, \text{正}, \text{反}), (\text{反}, \text{正}, \text{正}), (\text{反}, \text{正}, \text{反})\}$

4. 擲一粒骰子二次，觀察所出現的點數。 A 表示第一次出現偶數點的事件， B 表示點數和為奇數的事件。

問： A 、 B 是否為互斥事件？

解：判斷 A 和 B 都發生的事件，即表示：第一次出現偶數點且點數和是奇數的事件

$A \cap B = \{(2, 1), (2, 3), (2, 5), (4, 1), (4, 3), (4, 5), (6, 1), (6, 3), (6, 5)\} \neq \emptyset$ ，所以 A 、 B 不為互斥事件

5. 擲一粒骰子二次，觀察所出現的點數，求下列各事件的機率：

(1) 兩次的點數相同 (2) 第一次點數大於第二次點數

解：樣本空間 S 的樣本點個數 $n(S) = 6 \times 6 = 36$

(1) 兩次的點數相同的事件為 $A = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5), (6, 6)\}$

$$\Rightarrow n(A) = 6, P(A) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

$$(2) n(B: \text{第一次點數大於第二次點數}) = C_2^6 = 15, \Rightarrow P(B) = \frac{15}{36} = \frac{5}{12}$$

6.同時擲兩粒骰子，觀察所出現的點數，求下列各事件的機率：

- (1)兩粒骰子的點數都大於 3 (2)兩粒骰子的點數差為 3

解：樣本空間 S 的樣本點個數 $n(S)=6 \times 6=36$

$$(1) n(A: \text{兩粒骰子的點數都大於 } 3)=3 \times 3=9, P(A)=\frac{9}{36}=\frac{1}{4}$$

$$(2) \text{兩粒骰子的點數差為 } 3 \text{ 的事件為 } B=\{(1, 4), (2, 5), (3, 6), (4, 1), (5, 2), (6, 3)\}, n(B)=6$$

$$\Rightarrow P(B)=\frac{6}{36}=\frac{1}{6}$$

7.袋中有 6 個大小相同的球，其中紅球 3 個，白球 3 個。從袋中依序取球三次，每次取一球，取球後不放回，求下列各事件的機率：

- (1)三球為 2 紅球，1 白球 (2)三球中至少有 1 紅球 1 白球

解：樣本空間個數 $n(S: \text{取球三次，每次取一球，取球後不放回})=6 \times 5 \times 4=120$

(1) 2 紅球，1 白球的情形有三種：(紅，紅，白)，(紅，白，紅)，(白，紅，紅)，共有 $3 \times 2 \times 3+3 \times 3 \times 2+3 \times 3 \times 2=54$ 種，

$$\Rightarrow \text{機率}=\frac{54}{120}=\frac{9}{20}$$

(2) 至少有 1 紅球 1 白球的情形有(紅，紅，白)，(紅，白，紅)，(白，紅，紅)，(紅，白，白)，(白，紅，白)，(白，白，紅)，共有 $(3 \times 3 \times 2) \times 6=108$ 種

$$\Rightarrow \text{機率}=\frac{108}{120}=\frac{9}{10}$$

8.袋中有 6 個大小相同的球，其中紅球 4 個，白球 2 個。從袋中同時取出三球，求下列各事件的機率：

- (1)三球為 2 紅球，1 白球 (2)三球中至少有 1 紅球 1 白球

解：樣本空間個數 $n(S: \text{取出三球})=C_3^6=20$

$$(1) n(A: 2 \text{ 紅球}, 1 \text{ 白球})=C_2^4 \times C_1^2=12, \text{ 機率 } P(A)=\frac{12}{20}=\frac{3}{5}$$

$$(2) n(B: \text{至少有 } 1 \text{ 紅球 } 1 \text{ 白球})=n(2 \text{ 紅球 } 1 \text{ 白球或 } 1 \text{ 紅球 } 2 \text{ 白})=C_2^4 \times C_1^2 + C_1^4 \times C_2^2=12+4=16$$

$$\text{機率 } P(B)=\frac{16}{20}=\frac{4}{5}$$

9.袋中有編號 1~24 號大小相同的球各一顆。從袋中任取一球，求取出球的編號是 2 或 3 的倍數之機率

解：設 A_2, A_3 分別表示取出球的編號是 2 與 3 倍數之事件，樣本空間個數 $n(S)=24$

$$2 \text{ 或 } 3 \text{ 的倍數之機率}=P(A_2 \cup A_3)=P(A_2)+P(A_3)-P(A_2 \cap A_3)$$

$$=\frac{12}{24} + \frac{8}{24} - \frac{4}{24} = \frac{2}{3}$$

10.已知數學研究社共有 20 位同學參加，其中高一、高二、高三分別有 5 人、11 人、4 人參加。今從該社團中任選兩人解題，求此兩人是不同年級學生的機率。

解：樣本空間個數 $n(S: \text{任選兩人})=C_2^{20}=190$

$$n(A: \text{不同年級學生})=n(S)-n(A': \text{同年級學生})=190-(C_2^5 + C_2^{11} + C_2^4)=120-71=119$$

$$\text{機率 } P(A)=\frac{119}{190}$$

11. 同時擲三粒骰子，觀察所出現的點數，求下列各事件的機率：

- (1) 至少出現一粒 6 點 (2) 點數和為 9

解：樣本空間個數 $n(S) = 6 \times 6 \times 6 = 216$

$$(1) n(A : \text{至少出現一粒 6 點}) = n(S) - n(A' : \text{皆不出現 6 點}) = 216 - 5 \times 5 \times 5 = 91$$

$$\text{機率 } P(A) = \frac{91}{216}$$

$$(2) \text{點數和為 9 的事件 } B : (1, 2, 6) \text{ 有 } 3! = 6, (1, 3, 5) \text{ 有 } 3! = 6, (1, 4, 4) \text{ 有 } \frac{3!}{2!} = 3, (2, 2, 5) \text{ 有 } \frac{3!}{2!} = 3$$

$$(2, 3, 4) \text{ 有 } 3! = 6, (3, 3, 3) \text{ 有 } \frac{3!}{3!} = 1, \text{ 共有 } 6 + 6 + 3 + 3 + 6 + 1 = 25 \text{ 種, 機率 } P(B) = \frac{25}{216}$$



12. 在 7 張卡片中，有 4 張正數和 3 張負數。從中任取 2 張作乘法練習，其乘積是正數的機率為多少？

解：樣本空間個數 $n(S : 7 \text{ 張任取 } 2 \text{ 張}) = C_2^7 = 21$

$$n(A : \text{乘積是正數} = \text{兩張都是正或兩張都是負}) = C_2^4 + C_2^3 = 9, P(A) = \frac{9}{21} = \frac{3}{7}$$

13. 美美申辦提款卡時，依銀行規定須自選四個阿拉伯數字排成一組密碼。某天美美欲提款時發現她忘了正確密碼，只記得是由 1, 3, 5, 7 四個數字排成的，求以下問題的機率：

(1) 她一次就猜對的機率是多少？

(2) 當輸入的密碼錯誤達三次時，沒收該提款卡。美美嘗試輸入不同密碼，則她的提款卡會被沒收的機率是多少？

解：樣本空間個數 $n(S : 1, 3, 5, 7 \text{ 四個數字排列}) = 4! = 24$

$$(1) \text{第一次就猜對的機率} = P(A_1) = \frac{1}{24}$$

(2) 設 A_n' 表示第 n 次錯誤， A_n 表示第 n 次正確，且 A_n 兩兩互斥

$$\begin{aligned} P(\text{被沒收} = A_1' \cap A_2' \cap A_3') &= 1 - P(A_1 \cup A_2 \cup A_3) = 1 - P(A_1 \cup A_2 \cup A_3) \\ &= 1 - \left(\frac{1}{24} + \frac{1}{24} + \frac{1}{24} - 0 - 0 - 0 + 0 \right) = \frac{7}{8} \end{aligned}$$

14. 袋中有 5 顆白球和 n 顆黑球。今從袋中同時取出兩球，已知此兩球同為白球的機率是 $\frac{2}{21}$ ，求 n 的值

解：樣本空間個數 $n(S : n + 5 \text{ 球取出兩球}) = C_2^{n+5}$ ， $n(A : \text{兩球同為白球}) = C_2^5 = 10$

$$P(A) = \frac{10}{C_2^{n+5}} = \frac{2}{21}, \therefore (n+4)(n+5) = 210, \Rightarrow n^2 + 9n - 190 = 0, \text{ 分解為 } (n+19)(n-10) = 0, \text{ 得知 } n = 10$$