單元 2 級數 習題　　　　　　　　　　　　一年____班　座號：____　姓名：

1.以下各小題對的打「O」，錯的打「×」：

(1)等差數列$\langle a_n \rangle$恆有$a_1+a_2+a_3+a_4+a_5=5a_3$

(2)等比級數$1+3+9+\cdots+3^{10}$的和為$\dfrac{3^{10}-1}{2}$

(3)級數$1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3=(1+2+3+\cdots+n)^2$

解：(1) O，$a_1+a_5=a_2+a_4=2a_3$，(2)×，$1+3+9+\cdots+3^{10}=\dfrac{3^{11}-1}{2}$，

(3) O，$1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3=(\dfrac{n(n+1)}{2})^2=(1+2+3+\cdots+n)^2$

2.(1)求首項為 36，前 9 項和為 144 的等差數列的公差

(2)求等差數列$(-3)+(-1)+1+\cdots+23$的和

解：(1)利用等差級數的和公式，得$S_9=\dfrac{9\times(2\times36+(9-1)\times d)}{2}=144$，解得公差$d=-5$

(2)設此等差數列的項數為n，由$a_n=23=-3+(n-1)\times2$，解得$n=14$，利用等差級數的和公式，得$S_{14}=\dfrac{14\times((-3)+23)}{2}=140$

3.某表演廳共有 19 排座位，每一排都比前一排多 2 個座位，且正中間的那一排(即第 10 排)有 24 個座位，問此表演廳共有幾個座位？

解：$S_{19}=19a_{10}=19\times24=456$

4.有一面厚 63 公分的木頭牆，大小兩隻老鼠面對面穿牆。第一天大老鼠穿牆 2 公分，小老鼠穿牆 1 公分，接下來，大老鼠每天都比前一天多穿牆 2 公分，而小老鼠每天僅比前一天多穿牆 1 公分，問大小兩隻老鼠最快在第幾天才會將牆穿通？

解：設第n天大小老鼠合計可穿牆a_n公分。

根據題意，數列$\langle a_n \rangle$是首項為$2+1=3$，公差為$2+1=3$的等差數列

利用等差級數的和公式，得$S_n=\dfrac{n(2a_1+(n-1)d)}{2}=\dfrac{n(2\times3+3(n-1))}{2}=\dfrac{3n^2+3n}{2}$

當大小兩隻老鼠恰好穿牆而相逢時，$S_n\ge63$，即$\dfrac{3n^2+3n}{2}\ge63$

整理得$n^2+n-42\ge0$，解得$n\ge6$或$n\le-7$(不合)，故第 6 天後，大小兩隻老鼠會將牆穿通而相逢

5.(1)求首項為 96，公比為$\dfrac{1}{2}$的等比數列前 6 項的和

(2)求等比數列$(-2)+6+(-18)+\cdots+(-2)\times(-3)^9$的和

解：(1)利用等比級數的和公式，得$S_6=\dfrac{96\times\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^6\right)}{1-\frac{1}{2}}=189$

(2)設此等比數列的項數為n，由末項$a_n=(-2)\times(-3)^9=(-2)\times(-3)^{n-1}$，解得$n=10$

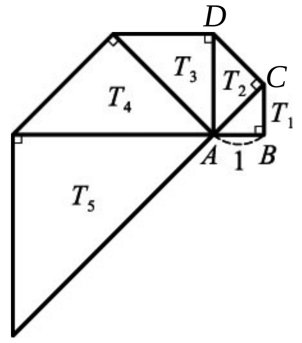
利用等比級數的和公式，得$S_{10}=\dfrac{(-2)\times(1-(-3)^{10})}{1-(-3)}=29524$

6.已知等比數列$\langle a_n \rangle$的首項為 2，末項為 512，和為 682，求此等比數列的公比與項數

解：設等比數列$\langle a_n \rangle$的公比為 r，得$\begin{cases} a_n = 2r^{n-1} = 512， & \cdots\cdots(\text{i}) \\ S_n = \dfrac{2(1-r^n)}{1-r} = 682， & \cdots\cdots(\text{ii}) \end{cases}$ 由(i)得 $r^{n-1} = 256$，代入第(ii)式，

得 $\dfrac{2(1-r^n)}{1-r} = \dfrac{2(1-r\cdot r^{n-1})}{1-r} = \dfrac{2(1-256r)}{1-r} = 682$，解得 $r=4$，$n=5$

7.右圖中，已知$\overline{AB}=1$，且T_1，T_2，T_3，T_4，T_5為 5 個等腰直角三角形，求這 5 個三角形的面積總和。



解：因為△ABC 為等腰直角三角形，所以$\overline{AC}=\sqrt{2}\,\overline{AB}$，

又△ACD 與△ABC 相似，可得T_2為T_1面積的$\sqrt{2}\times\sqrt{2}=2$倍，又首項T_1的面積為$\dfrac{1\times1}{2}=\dfrac{1}{2}$，

且同理可得T_1，T_2，T_3，T_4，T_5的面積是公比為 2 的等比數列，

因此，利用等比級數的和公式，可得T_1, T_2, T_3, T_4, T_5的面積總和為$S_5=\dfrac{\frac{1}{2}(1-2^5)}{1-2}=\dfrac{31}{2}$

8.已知數列$\langle a_n \rangle$之前 n 項的和$S_n=-2n^2+n$，求a_1的值，並寫出a_n的一般項

解：$a_1=S_1=-2\times1^2=-1$，

當 $n\geq 2$ 時，$a_n=S_n-S_{n-1}=-2n^2+n-(-2(n-1)^2+(n-1))^2=-4n+3$

9.求下列各級數的和：

(1)連續正整數的平方和：$6^2+7^2+8^2+\cdots+15^2$

(2)連續正偶數的立方和：$2^3+4^3+6^3+\cdots+20^3$

解：(1) $6^2+7^2+8^2+\cdots+15^2 = (1^2+2^2+3^2+\cdots+15^2)-(1^2+2^2+3^2+\cdots+5^2)=\dfrac{15\times16\times31}{6}-\dfrac{5\times6\times11}{6}=1185$

(2) $2^3+4^3+6^3+\cdots+20^3=2^3(1^3+2^3+3^3+\cdots+10^3)=8\times\left(\dfrac{10\times11}{2}\right)^2=24200$

10.已知一等差數列$\langle a_n \rangle$共有 12 項，其前兩項的和為 15，末兩項的和為 75，試求所有項的和

解：設此等差數列的公差為 d，得$a_1+a_2=a_1+a_1+d=2a_1+d=15$且$a_{11}+a_{12}=a_1+10d+a_1+11d=2a_1+21d=75$，

即$\begin{cases} 2a_1+d=15， & \cdots\cdots① \\ 2a_1+21d=75， & \cdots\cdots② \end{cases}$，解得$d=3, a_1=6$，由等差級數的和公式得$S_{12}=\dfrac{12(2\times6+11\times3)}{2}=270$

11.官府每日招兵人數均為立方數，依序為：首日招 1 人，次日招 8 人，第三日招 27 人，…，以此類推。已知總共招兵 11025 人，試求官府招兵的總日數

解：設共招兵 n 日，依題意得$1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3=\left(\dfrac{n\times(n+1)}{2}\right)^2=11025$，化簡得$\dfrac{n\times(n+1)}{2}=105$，

展開得$n^2+n-210=0$，解得$n=14$或-15(負不合)

12.一隻大烏龜背著兩隻中烏龜，這兩隻中烏龜的重量都是大烏龜的$\frac{1}{8}$，又每隻中烏龜又背著兩隻小烏龜，這兩隻小烏龜的重量也都是中烏龜的$\frac{1}{8}$，如此堆疊上去，共堆了 5 層。已知大烏龜有 96 公斤重，求所有烏龜重量的總和。

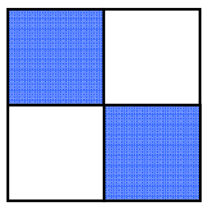
解：設第 n 層烏龜的總重量為 a_n 公斤。根據題意可知：數列$\langle a_n \rangle$是首項 96，公比$\frac{1}{8}\times 2=\frac{1}{4}$的等比數列。因此，5 層烏龜的總重量為

$$96+96\times\frac{1}{4}+96\times\left(\frac{1}{4}\right)^2+96\times\left(\frac{1}{4}\right)^3+96\times\left(\frac{1}{4}\right)^4=\frac{96\left(1-\left(\frac{1}{4}\right)^5\right)}{1-\frac{1}{4}}=\frac{1023}{8}$$ 公斤

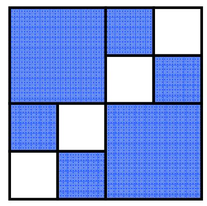
13.取一個邊長為 32 的白色正方形，將其等分成 4 個相同的正方形，然後將左上及右下的正方形塗上藍色；接著再將剩下的 2 個白色小正方形，分別等分成 4 個相同的更小正方形，並將左上及右下更小的正方形塗上藍色。重複這樣的步驟，如圖所示。依此規律可畫第 4 圖、第 5 圖、⋯，則：

(1)求第 9 圖藍色正方形的總數

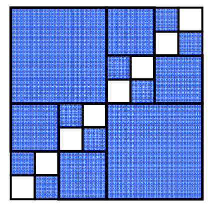
(2)求第 9 圖所有藍色正方形的面積和



第 1 圖



第 2 圖



第 3 圖

解：(1)設 a_n 為第 n 圖中灰色正方形的總數，由圖可知：

$a_1=2$，$a_2=2+4$，$a_3=2+4+8$，推得 $a_9=2+4+8+\cdots+2^9=1022$

(2)設 b_n 為第 n 圖中所有灰色正方形的面積和

$b_1=2\times16^2=2^9$，$b_2=2\times16^2+4\times8^2=2^9+2^8$，$b_3=2\times16^2+4\times8^2+8\times4^2=2^9+2^8+2^7$

…推得 $b_9=2^9+2^8+2^7+\ldots+2=1022$