單元 12 三角比的性質 習題 二年____班 座號：____ 姓名：

1.在△ABC 中，若 a，b，c 分別表示三內角∠A，∠B，∠C 的對邊長，以下各小題對的打「O」，錯的打「×」：

___(1)當∠A＝20°時，△ABC 的面積＝$\frac{1}{2}ab\sin 20°$

___(2)當∠A：∠B：∠C＝2：3：4 時，$a：b：c$＝2：3：4

___(3)當△ABC 的外接圓為 5，∠A＝30°時，a＝5

___(4)當∠A 為鈍角時，$a^2<b^2+c^2$

___(5)當 a＝5，b＝6，c＝7 時，△ABC 為銳角三角形

解：(1)×：△ABC 的面積＝$\frac{1}{2}bc\sin 20°$

(2)×：∠A＝40°，∠B＝60°，∠C＝80°，∴$a：b：c$＝sin40°：sin60°：sin80°

(3)O：根據正弦定理，$\frac{a}{\sin A}$＝2R，∴a＝2R sin A＝2×5×sin30°＝5

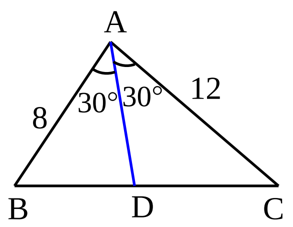
(4)×：根據餘弦定理，cosA＝$\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$＜0，∴$b^2+c^2<a^2$

(5) O：因為△ ABC 的最大邊為 $c = 7$，所以最大角為∠C 。根據餘弦定理，得 cos$C$＝$\frac{5^2+6^2-7^2}{2\times5\times6}$＞0，∴∠$C$ 為銳角

⇒△ABC 為銳角三角形

2.在△ABC 中，已知 $\overline{AB}$ ＝8，$\overline{AC}$ ＝12，∠A＝60°，求：

(1) △ABC 的面積 (2) ∠A 的內角平分線長

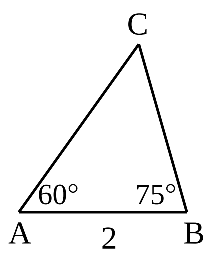


解：(1) △ABC 的面積＝$\frac{1}{2}$×18×12×sin60°＝$24\sqrt{3}$

(2)如右圖，△ABC 的面積＝△ABD 的面積＋△ACD 的面積

∴$\frac{1}{2}$×18×12×sin60°＝$\frac{1}{2}$×8×$\overline{AD}$×sin30°＋$\frac{1}{2}$×12×$\overline{AD}$×sin30°，∴ $\overline{AD}$ ＝$\frac{24\sqrt{3}}{5}$

3.在△ABC 中，已知 $\overline{AB}$ ＝2，∠A＝60°，∠B＝75°，求 $\overline{BC}$ 的長度及△ABC 的外接圓半徑



解：(1)如右圖，∠C＝180°－60°－75°＝45°

由正弦定理：$\frac{2}{\sin 45^0}=\frac{\overline{BC}}{\sin 60^0}$ ，∴ $\overline{BC}=\sqrt{6}$

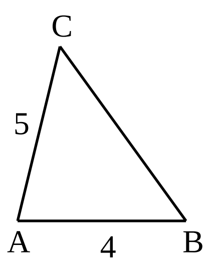
(2)由正弦定理 2R＝$\frac{2}{\sin 45^0}$＝$2\sqrt{2}$ ，∴外接圓半徑 R＝$\sqrt{2}$

4.在△ABC 中，已知∠A：∠B：∠C＝3：4：5，求 $\overline{AC}$ ： $\overline{BC}$

解：∠A＝$\frac{3}{3+4+5}$×180°＝45°，∠B＝$\frac{4}{3+4+5}$×180°＝60°，∠C＝$\frac{5}{3+4+5}$×180°＝75°

由正弦定理： $\overline{AC}$ ： $\overline{BC}$ ＝sinB：sinA＝sin60°：sin45°＝ $\sqrt{3}$ ： $\sqrt{2}$

5.在△ABC 中，已知 $\overline{AB}$ ＝4，$\overline{AC}$ ＝5，cosA＝$\frac{1}{8}$ ，求 $\overline{BC}$ 的長度

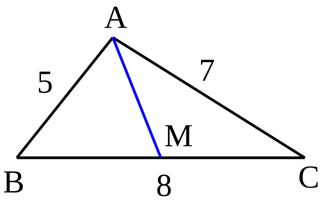


解：如右圖，由餘弦定理：$\overline{BC}^2$ ＝$4^2+5^2-2\times4\times5\times\frac{1}{8}$＝36，$\overline{BC}$ ＝6

6.在△ABC 中，設 $\overline{AB}=5$，$\overline{BC}=8$，$\overline{AC}=7$，則：

(1)求∠B 的度數

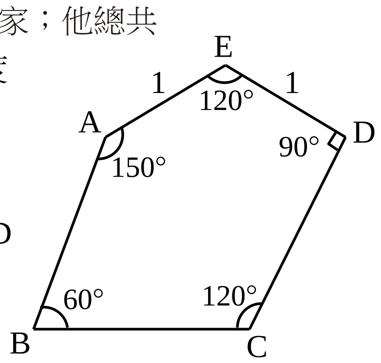
(2)令 M 為 $\overline{BC}$ 邊上的中點，求中線 $\overline{AM}$ 的長度



解：(1)由餘弦定理：$\cos B=\dfrac{5^2+8^2-7^2}{2\times5\times8}=\dfrac{1}{2}$

(2)由餘弦定理，在△ABM 中，$\overline{AM}^2=5^2+4^2-2\times5\times4\times\cos B=21$，$\overline{AM}=\sqrt{21}$

7.賴因哈特(K. Reinhardt，1895~1941)為第一位發現可以用來無縫密鋪平面的凸五邊形之數學家；他總共發現五種，其中一種的示意圖如右。已知 $\overline{AE}=\overline{DE}=1$，且 $\overline{AB}=\overline{BC}=\overline{CD}$，求 $\overline{AB}$ 的長度



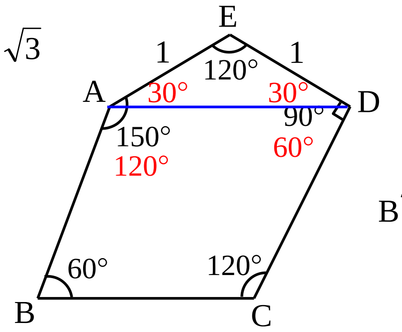
解：(1)連接 $\overline{AD}$，∵ $\overline{AE}=\overline{DE}$，∴△$ADE$ 為等腰△

由餘弦定理，$\overline{AD}^2=1^2+1^2-2\times1\times1\times\cos120°=3$，∴ $\overline{AD}=\sqrt{3}$

(2)如右圖，∠BAD＝120°＝∠C，∠ADC＝60°＝∠B

又 $\overline{AB}=\overline{BC}=\overline{CD}$，∴四邊形 ABCD 為菱形

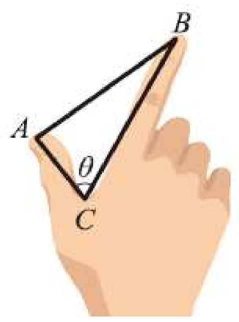
$\Rightarrow\overline{AB}=\overline{AD}=\sqrt{3}$



8.右圖是右手食指與拇指伸直，虎口張開 θ 時的手指形狀。已知此人的手指相關部分長度，$\overline{BC}=15$，$\overline{AC}=8$。

(1)若 $\overline{AB}=17$，則虎口張開的角度 θ 為多少？

(2)若已知虎口張開的角度 $\theta=60°$，求 $\overline{AB}$ 的長度



解：(1)在△ABC 中，利用餘弦定理 $\cos\theta=\dfrac{\overline{BC}^2+\overline{AC}^2-\overline{AB}^2}{2\times\overline{BC}\times\overline{AC}}$

得 $\cos\theta=\dfrac{15^2+8^2-17^2}{2\times15\times8}=0$，故 $\theta=90°$

(2)當虎口張開的角度 $\theta=60°$時，利用餘弦定理 $\overline{AB}^2=\overline{AC}^2+\overline{BC}^2-2\times\overline{AC}\times\overline{BC}\times\cos\theta$

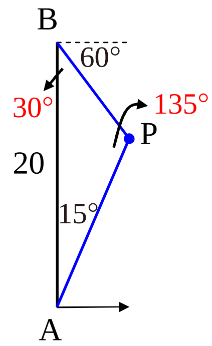
得 $\overline{AB}^2=8^2+15^2-2\times8\times15\times\dfrac{1}{2}=169$，故 $\overline{AB}=\sqrt{169}=13$

9.求三邊長分別為 5，7，8 的三角形之面積

解：利用海龍公式，$s=\dfrac{5+7+8}{2}=10$

三角形之面積＝$\sqrt{10(10-5)(10-7)(10-8)}=10\sqrt{3}$

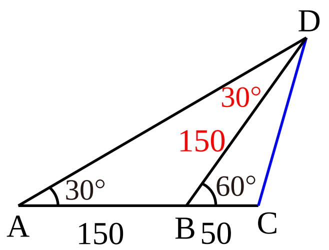
10.從 A 地看見某建築物在北 15°東；向北前進 20 公里至 B 地後，發現建築物在東 60 南。試求 A 地與建築物的距離

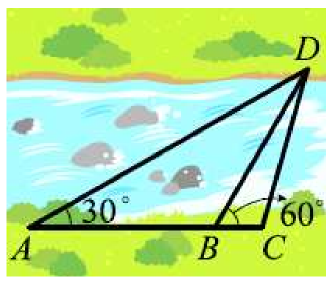


解：(1)如右圖，∠ABP＝90°－60°＝30°，∴∠P＝180°－15°－30°＝135°

(2)在△ABP 中，根據正弦定理：$\dfrac{\overline{AP}}{\sin30^0}=\dfrac{20}{\sin135^0}$，∴ $\overline{AP}=10\sqrt{2}$

11.如右圖所示， 在河邊 A，B 兩處分別測得∠DAC＝30°，∠DBC＝60°。已知 A，B 相距 150 公尺，B，C 相距 50 公尺，求 C，D 的距離





解：(1)∵∠DBC 為∠ABD 的外角，∴∠ADB＝60°－30°＝30°

⇒△ADB 為等腰△，得知 $\overline{AB}=\overline{BD}=150$

(2)在△BCD 中，根據餘弦定理

$\overline{CD}^2=50^2+150^2-2\times50\times150\times\cos60°=50^2\times7$

$\Rightarrow\overline{CD}=50\sqrt{7}$ (公尺)

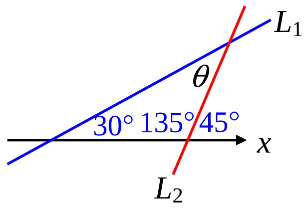
12.求坐標平面上兩直線 L_1：$x-\sqrt{3}y=2$ 與 L_2：$x-y=5$ 夾角的度數。(兩解)

解：設直線 L_1 與 L_2 的斜角分別為 θ_1 與 θ_2

(1)直線斜率 $=\tan\theta_1=\dfrac{1}{\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$，得知 $\theta_1=30°$；$\tan\theta_2=1$，得知 $\theta_2=45°$

(2)如圖，兩直線的一個夾角 $\theta=180°-30°-135°=15°$

另一夾角為 $180°-\theta=180°-15°=165°$



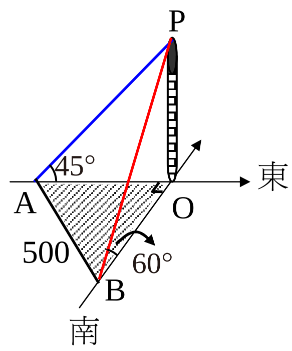
13.從山頂上觀測山腳下兩地 A 與 B，測得 A 地在山的正西方且俯角為 45°；B 地在山丘的正南方且俯角為 60°。已知 A 與 B 相距 500 公尺，求山高。

解：如右圖，設山高 $\overline{OP}=h$ 公尺

在△AOP 中，$\overline{AO}=h$ 公尺；在△AOB 中，$\overline{BO}=\dfrac{h}{\sqrt{3}}$ 公尺

⇒在直角△AOB 中，$500^2=h^2+(\dfrac{h}{\sqrt{3}})^2=\dfrac{4}{3}h^2$

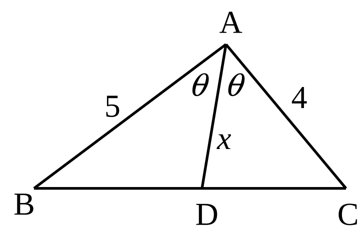
得知 $h=250\sqrt{3}$ 公尺



14.在△ABC 中，$\overline{AB}=5$，$\overline{AC}=4$，且∠A 的內角平分線交 $\overline{BC}$ 於 D，如右圖所示。

(1)求面積比△ABD：△ACD 及邊長比 $\overline{BD}$：$\overline{CD}$

(2)已知 $\overline{BC}=6$，求 $\overline{AD}$ 的長度



解：(1)設∠BAD＝∠CAD＝θ，令 $\overline{AD}=x$

(i)△ABD：△ACD＝$\dfrac{1}{2}\overline{AB}\times\overline{AD}\sin\theta$：$\dfrac{1}{2}\overline{AC}\times\overline{AD}\sin\theta=\overline{AB}:\overline{AC}=5:4$

(ii) △ABD 與△ACD 的高相同，⇒ $\overline{BD}:\overline{CD}$＝△$ABD$：△$ACD$＝5：4

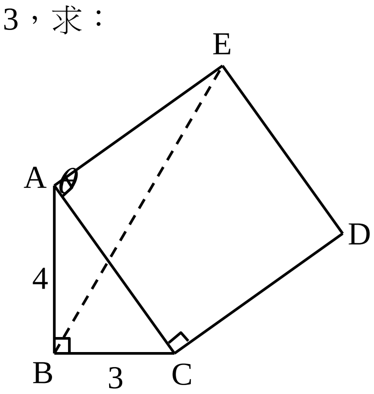
(2)由(1)，得知 $\overline{BD}:\overline{CD}=5:4$，⇒ $\overline{BD}=6\times\dfrac{5}{5+4}=\dfrac{10}{3}$

在△ABC 中，$\cos B=\dfrac{5^2+6^2-4^2}{2\times5\times6}$；在△$ABD$ 中，$\cos B=\dfrac{5^2+\dfrac{10}{3}^2-x^2}{2\times5\times\dfrac{10}{3}}$

⇒ $\cos B=\dfrac{5^2+6^2-4^2}{2\times5\times6}=\dfrac{5^2+\dfrac{10}{3}^2-x^2}{2\times5\times\dfrac{10}{3}}$，解得 $x=\dfrac{10}{3}$，$\overline{AD}=\dfrac{10}{3}$

15.如右圖所示，設△ABC 為一直角三角形，且四邊形 ACDE 為正方形。已知 $\overline{AB}=4$，$\overline{BC}=3$，求：

(1) cos(∠BAE)的值　　(2) $\overline{BE}$ 的長度　　(3) △ABE 的面積



解：(1)在△ABC 中，$\overline{AC}=\sqrt{3^2+4^2}=5$，令∠BAD＝$\theta$

$\cos(\angle BAE)=\cos(90°+\theta)=-\sin\theta=-\dfrac{3}{5}$

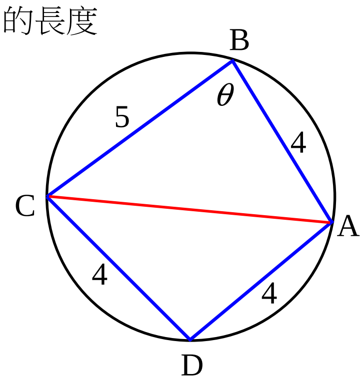
(2)在△BAE 中，利用餘弦定理

$\overline{BE}^2=\overline{AB}^2+\overline{AE}^2-2\times\overline{AB}\times\overline{AE}\cos(\angle BAE)=4^2+5^2-2\times4\times5\times(-\dfrac{3}{5})=65$，$\overline{BE}=\sqrt{65}$

(3)因 $\sin(\angle BAE)=\sin(90°+\theta)=\cos\theta=\dfrac{4}{5}$

⇒△ABE 的面積 $=\dfrac{1}{2}\times\overline{AB}\times\overline{AE}\sin(\angle BAE)=\dfrac{1}{2}\times4\times5\times\dfrac{4}{5}=8$

16.右圖中 ABCD 為圓內接四邊形。已知 $\overline{AB}=4$，$\overline{BC}=5$，$\overline{CD}=4$，$\overline{DA}=4$，求對角線 $\overline{AC}$ 的長度



解：1.連接 $\overline{AC}$，令 $\overline{AC}=x$

2.因 ABCD 為圓內接四邊形，∠B＋∠D＝180°，令∠B＝θ，∠D＝180°－θ

3.利用餘弦定理：

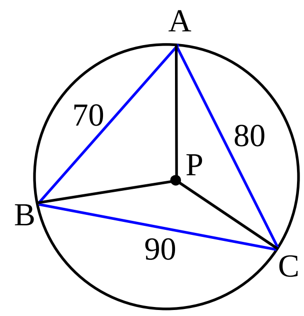
在△ABC 中，$\cos B=\dfrac{5^2+4^2-x^2}{2\times5\times4}=\dfrac{41-x^2}{2\times5\times4}=\cos\theta$

在△ACD 中，$\cos D=\dfrac{4^2+4^2-x^2}{2\times4\times4}=\dfrac{32-x^2}{2\times4\times4}=\cos(180°-\theta)=-\cos\theta$

$\Rightarrow \cos\theta=\dfrac{41-x^2}{2\times5\times4}=-\dfrac{32-x^2}{2\times4\times4}$，解得 $x=6$，即 $\overline{AC}=6$

17.某校欲在校園內設置無線網路基地臺且地點必須與 A，B，C 三地等距離。已知 A，B，C 三地彼此間的距離分別為 $\overline{AB}=70$ 公尺，$\overline{AC}=80$ 公尺與 $\overline{BC}=90$ 公尺，求：(1) cos C 的值　　(2)基地台與三地的距離

解：作一示意圖如右



(1)在△ABC 中，利用餘弦定理，$\cos C=\dfrac{80^2+90^2-70^2}{2\times80\times90}=\dfrac{2}{3}$

(2)如圖，設 P 與 A，B，C 三地等距離，則 P 為△ABC 的外心(外接圓圓心)

$\Rightarrow$令 $\overline{AP}=\overline{BP}=\overline{CP}=$外接圓半徑 R，又 $\sin C=\sqrt{1-(\frac{2}{3})^2}=\dfrac{\sqrt{5}}{3}$

由正弦定理 $2R=\dfrac{\overline{AB}}{\sin C}=\dfrac{70}{\frac{\sqrt{5}}{3}}$，得 $R=21\sqrt{5}$，$\Rightarrow$基地台與三地的距離＝$21\sqrt{5}$

18.探險隊從沉船上撈起一只手錶，僅存鏽蝕的時針痕跡及 12 點的刻度，如圖所示。
利用直尺量得：手錶中心點與 12 點的刻度之距離為 5；鏽蝕的時針長度為 3 且 12 點的刻度與時針尖端的距離為 7。試求手錶停止的時間。

解：如圖所示，利用餘弦定理，得 $\cos(\angle AOB)=-\dfrac{1}{2}\ \dfrac{5^2+3^2-7^2}{2\times5\times3}$，即$\angle AOB=120°$

鏽蝕時針的痕跡與 12 點方向之間的夾角為 120°，
所以鏽蝕時針所指方向為四點鐘方向，即手錶停於 4 點整