第 1 章　極限與函數

1-4　函數的極限

1.　求下列各極限：

(1) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{2x+1}{x^2+3}$　　(2) $\lim\limits_{x\to1}\left(\dfrac{x^2-1}{x^2+3x-4}-\dfrac{x^2+x-2}{x^2-1}\right)$

解

(1) 原式 $=\dfrac{2\times2+1}{2^2+3}=\dfrac{5}{7}$.

(2) 原式 $=\lim\limits_{x\to1}\left(\dfrac{x+1}{x+4}-\dfrac{x+2}{x+1}\right)=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x+1}{x+4}-\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x+2}{x+1}$

$=\dfrac{1+1}{1+4}-\dfrac{1+2}{1+1}=\dfrac{2}{5}-\dfrac{3}{2}$.

2.　求下列各極限：

(1) $\lim\limits_{x\to5}\left(\dfrac{x+1}{x-5}-\dfrac{10x+10}{x^2-25}\right)$　　(2) $\lim\limits_{x\to3}\left(\dfrac{x-4}{x-3}+\dfrac{2}{x^2-4x+3}\right)$

解

(1) 原式 $=\lim\limits_{x\to5}\left(\dfrac{x^2-4x-5}{x^2-25}\right)=\lim\limits_{x\to5}\dfrac{(x-5)(x+1)}{(x-5)(x+5)}$

$=\lim\limits_{x\to5}\dfrac{x+1}{x+5}=\dfrac{5+1}{5+5}=\dfrac{1}{5}$.

(2) 原式 $=\lim\limits_{x\to3}\dfrac{(x-4)(x-1)+2}{(x-1)(x-3)}=\lim\limits_{x\to3}\dfrac{x^2-5x+6}{(x-1)(x-3)}$

$=\lim\limits_{x\to3}\dfrac{x-2}{x-1}=\dfrac{3-2}{3-1}=\dfrac{2}{1}$.

3.　求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(x+1)^{10}-1}{x}$.

解　利用二項式定理，得

$$\text{原式}=\lim_{x\to 0}\frac{C_0^{10}x^{10}+C_1^{10}x^9+\cdots+C_9^{10}x+C_{10}^{10}-1}{x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\left(C_0^{10}x^9+C_1^{10}x^8+\cdots+C_9^{10}\right)$$

$$=C_9^{10}=10\ .$$

4.　求 $\lim\limits_{x\to 1}\left[\dfrac{x^{10}-1}{(x-1)^2}-\dfrac{10}{x-1}\right]$.

解

$$\text{原式}=\lim_{x\to 1}\frac{x^{10}-1-10(x-1)}{(x-1)^2}$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x^9+x^8+\cdots+x-9)}{(x-1)^2}$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)^2(x^8+2x^7+\cdots+8x+9)}{(x-1)^2}$$

$$=\lim_{x\to 1}(x^8+2x^7+\cdots+8x+9)$$

$$=1+2+\cdots+9\ .$$

5.　求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2-2x}{|x|}$.

解　因為

右極限：$\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{x^2-2x}{|x|}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{x^2-2x}{x}=\lim\limits_{x\to 0^+}(x-2)=-2$,

左極限：$\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{x^2-2x}{|x|}=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{x^2-2x}{-x}=\lim\limits_{x\to 0^-}(-x+2)=2$,

即右極限 $\neq$ 左極限，所以 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2-2x}{|x|}$ 不存在 .

6.　已知 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+ax+b}{x-1}=-4$，求實數 a，b 的值．

解　因為此分式在 $x=1$ 的極限存在，且其分母在 $x=1$ 的函數值為 0，所以其分子在 $x=1$ 的函數值為 0，即

$1+a+b=0 \quad\Rightarrow\quad b=-1-a$ ．

於是

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 1}\frac{x^2+ax+b}{x-1}&=\lim_{x\to 1}\frac{x^2+ax+(-1-a)}{x-1}\\&=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x+1+a)}{x-1}\\&=\lim_{x\to 1}(x+1+a)=2+a\ ,\end{aligned}$$

即 $2+a=-4$，解得 $a=-6$，$b=5$ ．

7.　已知 $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2+x+a}{x-2}=b$，求實數 a，b 的值．

解　因為此分式在 $x=2$ 的極限存在，且其分母在 $x=2$ 的函數值為 0，所以其分子在 $x=2$ 的函數值為 0，即

$$2^2+2+a=0\ .$$

解得 $a=-6$ ．因此

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2+x+a}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{x^2+x-6}{x-2}=\lim_{x\to 2}(x+3)=5\ .$$

故 $a=-6$，$b=5$ ．

8. 已知 $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2+ax+b}{(x-1)(x+2)}=2$，求實數 a， b 的值．

解 因為此分式在 $x=1$ 的極限存在，且其分母在 $x=1$ 的函數值為 0，所以其分子在 $x=1$ 的函數值為 0，即分子有 $x-1$ 的因式．

令 $x^2+ax+b=(x-1)(x-k)$，則

$$\lim_{x\to1}\frac{x^2+ax+b}{(x-1)(x+2)}=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)(x-k)}{(x-1)(x+2)}=\lim_{x\to1}\frac{x-k}{x+2}=\frac{1-k}{3}\ .$$

因此，$\dfrac{1-k}{3}=2 \quad\Rightarrow\quad k=-5$，得

$$x^2+ax+b=(x-1)(x+5)=x^2+4x-5\ ,$$

故 $a=4$， $b=-5$ ．

9. 已知三次多項式 $f(x)$ 滿足 $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{f(x)}{x-1}=1$ 且 $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{f(x)}{x-2}=3$，求 $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{f(x)}{x+1}$ ．

解 因為 $x-1$ 在 $x=1$ 的函數值為 0，且 $x-2$ 在 $x=2$ 的函數值為 0，所以兩分式的共同分子 $f(x)$ 有 $x-1$ 與 $x-2$ 的因式．於是，可設

$$f(x)=(x-1)(x-2)(ax+b)\ .$$

得

$$\lim_{x\to1}\frac{f(x)}{x-1}=\lim_{x\to1}(x-2)(ax+b)=-a-b\ ,$$

$$\lim_{x\to2}\frac{f(x)}{x-2}=\lim_{x\to2}(x-1)(ax+b)=2a+b\ .$$

由題意，得

$$\begin{cases}-a-b=1\\2a+b=3\end{cases}\quad\Rightarrow\quad\begin{cases}a=4\\b=-5\end{cases}.$$

即 $f(x)=(4x-5)(x-1)(x-2)$ ．

故 $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{f(x)}{x+1}=\dfrac{7\cdot2\cdot1}{3+1}=\dfrac{7}{2}$ ．

10. 已知 $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^2+ax+8}{|x|-2}=b$，求實數 a，b 的值．

解 因為當 x 接近 -2 時，x 為負，所以

$$\lim_{x\to -2}\frac{x^2+ax+8}{|x|-2}=\lim_{x\to -2}\frac{x^2+ax+8}{-x-2}\ .$$

因為此分式在 $x=-2$ 的極限存在，且其分母在 $x=-2$ 的函數值為 0，所以其分子在 $x=-2$ 的函數值為 0，即

$$(-2)^2+a\cdot(-2)+8=0 \quad \Rightarrow \quad a=6\ .$$

因此，

$$原式=\lim_{x\to -2}\frac{x^2+6x+8}{-x-2}=\lim_{x\to -2}\frac{(x+2)(x+4)}{-(x+2)}=\lim_{x\to -2}\left(-(x+4)\right)=-2\ .$$

故 $a=6$，$b=-2$．

11. 已知函數 $f(x)=\begin{cases} x^3+2, & x\ge 1 \\ -x^2+k, & x<1 \end{cases}$ 為連續函數，求實數 k 的值．

解 因為當 $x>1$ 或 $x<1$ 時，$f(x)$ 是多項式函數，所以只要 $f(x)$ 在 $x=1$ 處連續，$f(x)$ 就是連續函數．又由於要使 $f(x)$ 在 $x=1$ 處連續，必須滿足 $\lim\limits_{x\to 1}f(x)=f(1)$，且

$$f(1)=1^3+2=3,$$

$$\lim_{x\to 1^+}f(x)=\lim_{x\to 1^+}\left(x^3+2\right)=3,$$

$$\lim_{x\to 1^-}f(x)=\lim_{x\to 1^-}\left(-1^2+k\right)=-1+k\ ,$$

於是可得 $-1+k=3$，解得 $k=4$．

12. 已知方程式 $x^3-3x^2-4x+11=0$ 恰有一個負根，求與此負根最接近的整數．

解 令 $f(x)=x^3-3x^2-4x+11$，經過計算得

x	-2	-1	0
$f(x)$	-1	11	11

因為 $f(-2)f(-1)<0$，所以此負根在區間 $(-2,-1)$ 內．

又因為

$$f\left(-\frac{3}{2}\right)=-\frac{27}{8}-\frac{27}{4}+6+11=\frac{55}{8}>0,$$

所以 $f(-2)f\left(-\frac{3}{2}\right)<0$，即此負根在區間 $\left(-2,-\frac{3}{2}\right)$ 內．

故與此負根最接近的整數為 -2．