# 1-4 外積、體積與行列式

## 重點一　空間向量的外積

**例題 1**

已知 $\vec{a}=(2,1,0)$，$\vec{b}=(0,1,2)$，試求：

(1) $\vec{a}\times\vec{b}=$ ________。（5 分）

(2) $3\vec{b}\times 2\vec{a}=$ ________。（5 分）

**解：** (1) $\vec{a}\times\vec{b}=\left(\begin{vmatrix}1&0\\1&2\end{vmatrix},\begin{vmatrix}0&2\\2&0\end{vmatrix},\begin{vmatrix}2&1\\0&1\end{vmatrix}\right)=(2,-4,2)$

(2) $3\vec{b}=(0,3,6)$，$2\vec{a}=(4,2,0)$

$3\vec{b}\times 2\vec{a}=\left(\begin{vmatrix}3&6\\2&0\end{vmatrix},\begin{vmatrix}6&0\\0&4\end{vmatrix},\begin{vmatrix}0&3\\4&2\end{vmatrix}\right)=(-12,24,-12)$

**例題 2**

已知空間中兩非零向量 $\vec{a}$，$\vec{b}$，下列何者正確？（10 分）

(A) $\vec{a}\times\vec{b}=\vec{b}\times\vec{a}$

(B) $|\vec{a}\times\vec{b}|=|\vec{b}\times\vec{a}|$

(C) $\vec{a}\cdot(\vec{a}\times\vec{b})=0$

(D)若 $\vec{a}\,/\!/\,\vec{b}$ 時，則 $\vec{a}\times\vec{b}=\vec{0}$

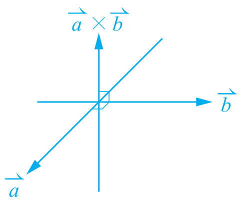
(E)若 $\vec{a}\perp\vec{b}$ 時，則 $\vec{a}\times\vec{b}=\vec{0}$

**解：** (A) ×：$\vec{b}\times\vec{a}=-(\vec{a}\times\vec{b})$

(B) ○：$|\vec{a}\times\vec{b}|=\sqrt{|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2-(\vec{a}\cdot\vec{b})^2}$

$=\sqrt{|\vec{b}|^2|\vec{a}|^2-(\vec{b}\cdot\vec{a})^2}$

$=|\vec{b}\times\vec{a}|$




(C) ○：$(\vec{a}\times\vec{b})\perp\vec{a}\Rightarrow\vec{a}\cdot(\vec{a}\times\vec{b})=0$

(D) ○：若 $\vec{a}\,/\!/\,\vec{b}\Rightarrow\vec{b}=t\vec{a}$

$\because\vec{a}=(a_1,a_2,a_3)$，$\vec{b}=(ta_1,ta_2,ta_3)$

$\vec{a}\times\vec{b}=\left(\begin{vmatrix}a_2&a_3\\ta_2&ta_3\end{vmatrix},\begin{vmatrix}a_3&a_1\\ta_3&ta_1\end{vmatrix},\begin{vmatrix}a_1&a_2\\ta_1&ta_2\end{vmatrix}\right)$

$=(0,0,0)=\vec{0}$

(E) ×：$(\vec{a}\times\vec{b})$ 為 $\vec{a}$ 與 $\vec{b}$ 的公垂向量

故選(B)(C)(D)

**例題** 3

設 $\vec{a}=(1,0,1)$，$\vec{b}=(1,2,0)$，若 $\vec{e}$ 同時垂直於 $\vec{a}$ 與 $\vec{b}$，且 $|\vec{e}|=3$，試求 $\vec{e}$。（10 分）

**解：** $\vec{a}\times\vec{b}=\left(\begin{vmatrix}0&1\\2&0\end{vmatrix},\begin{vmatrix}1&1\\0&1\end{vmatrix},\begin{vmatrix}1&0\\1&2\end{vmatrix}\right)=(-2,1,2)$

$\because$ $\vec{e}$ 同時垂直於 $\vec{a}$ 與 $\vec{b}$　$\therefore$ $\vec{e}\,/\!/\,\vec{a}\times\vec{b}$

$\Rightarrow \vec{e}=t(\vec{a}\times\vec{b})=t(-2,1,2)$

又 $|\vec{e}|=3 \Rightarrow \sqrt{(-2t)^2+t^2+(2t)^2}=3 \Rightarrow |t|\times 3=3$　$\therefore t=\pm 1$

故 $\vec{e}=(-2,1,2)$ 或 $(2,-1,-2)$

**例題** 4

空間中三點 $A(0,1,2)$，$B(1,1,1)$，$C(1,-1,0)$，試求：

(1) $\overrightarrow{AB}$ 與 $\overrightarrow{AC}$ 所張出的平行四邊形面積。（5 分）

(2) 試求點 $B$ 到直線 $AC$ 的距離。（5 分）

**解：** (1) $\overrightarrow{AB}=(1,0,-1)$，$\overrightarrow{AC}=(1,-2,-2)$，

$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\left(\begin{vmatrix}0&-1\\-2&-2\end{vmatrix},\begin{vmatrix}-1&1\\-2&1\end{vmatrix},\begin{vmatrix}1&0\\1&-2\end{vmatrix}\right)$

$=(-2,1,-2)$

$\overrightarrow{AB}$ 與 $\overrightarrow{AC}$ 所張出的平行四邊形面積為

$|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}|=\sqrt{(-2)^2+1^2+(-2)^2}=3$

(2) $\overrightarrow{AC}=(1,-2,-2)\Rightarrow|\overrightarrow{AC}|=\sqrt{1^2+(-2)^2+(-2)^2}=3$

$\overrightarrow{AB}$ 與 $\overrightarrow{AC}$ 所張出的平行四邊形面積 $=|\overrightarrow{AC}|\times$ 點 $B$ 到直線 $AC$ 的距離 $=3$

$\therefore$ 點 $B$ 到直線 $AC$ 的距離 $=\dfrac{3}{3}=1$

**例題** 5

空間中，已知 $|\vec{a}|=2$，$|\vec{b}|=5$，$\vec{a}\cdot\vec{b}=6$，試求 $|\vec{a}\times\vec{b}|$。（10 分）

**解：** $|\vec{a}\times\vec{b}|=\sqrt{|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2-(\vec{a}\cdot\vec{b})^2}=\sqrt{2^2\times5^2-6^2}=8$

◎重點二　三階行列式的定義與性質

**例題** 6（降階公式）

試求下列各行列式之值：

(1) $\begin{vmatrix} 2 & 2 & 7 \\ 4 & -3 & 5 \\ -1 & 2 & 6 \end{vmatrix}$。（5 分）　(2) $\begin{vmatrix} 3 & -6 & 5 \\ 1 & -2 & 13 \\ -4 & 8 & 27 \end{vmatrix}$。（5 分）

**解：**

(1) $\begin{vmatrix} 2 & 2 & 7 \\ 4 & -3 & 5 \\ -1 & 2 & 6 \end{vmatrix}=2\begin{vmatrix} -3 & 5 \\ 2 & 6 \end{vmatrix}-2\begin{vmatrix} 4 & 5 \\ -1 & 6 \end{vmatrix}+7\begin{vmatrix} 4 & -3 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}=-56-58+35=-79$

(2) $\begin{vmatrix} 3 & -6 & 5 \\ 1 & -2 & 13 \\ -4 & 8 & 27 \end{vmatrix}=3\begin{vmatrix} -2 & 13 \\ 8 & 27 \end{vmatrix}-\begin{vmatrix} -6 & 5 \\ 8 & 27 \end{vmatrix}-4\begin{vmatrix} -6 & 5 \\ -2 & 13 \end{vmatrix}=-474+202+272=0$

**例題 7**

試求行列式 $\begin{vmatrix} 88 & 127 & -59 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 12 & -27 & -41 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}$ 的值。（10 分）

**解：** $\begin{vmatrix} 88 & 127 & -59 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 12 & -27 & -41 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}$

$$= \begin{vmatrix} 88+12 & 127-27 & -59-41 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= 100 \times \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= 100 \times (2+9-2+6-6-1)$$

$$= 100 \times 8 = 800$$

**例題 8**

設 $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = 10$，試求行列式 $\begin{vmatrix} a_1+3a_2 & a_3 & 4a_3+a_2 \\ b_1+3b_2 & b_3 & 4b_3+b_2 \\ c_1+3c_2 & c_3 & 4c_3+c_2 \end{vmatrix}$ 的值。（10 分）

**解：** $\begin{vmatrix} a_1+3a_2 & a_3 & 4a_3+a_2 \\ b_1+3b_2 & b_3 & 4b_3+b_2 \\ c_1+3c_2 & c_3 & 4c_3+c_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1+3a_2 & a_3 & a_2 \\ b_1+3b_2 & b_3 & b_2 \\ c_1+3c_2 & c_3 & c_2 \end{vmatrix}$

×（−4）　　×（−3）

$$= \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_2 \\ b_1 & b_3 & b_2 \\ c_1 & c_3 & c_2 \end{vmatrix}$$

互換

$$= -\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = -10$$

**例題** 9

試求 $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 5 \\ 4 & 9 & 25 \end{vmatrix} =$ ＿＿＿＿＿。（10 分）

**解：**

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 5 \\ 2^2 & 3^2 & 5^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3-2 & 5-2 \\ 2^2 & 3^2-2^2 & 5^2-2^2 \end{vmatrix}$$

$\times(-1)$　$\times(-1)$

$$= \begin{vmatrix} 3-2 & 5-2 \\ (3+2)(3-2) & (5+2)(5-2) \end{vmatrix}$$

$$=(3-2)(5-2)\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3+2 & 5+2 \end{vmatrix}$$

$$=(3-2)(5-2)(5-3)$$

$$=(2-3)(3-5)(5-2)=6$$

◎重點三　三階行列式的應用

**例題** 10

空間中有三向量 $\overrightarrow{OA}=(1,2,4)$，$\overrightarrow{OB}=(1,3,9)$，$\overrightarrow{OC}=(1,4,16)$，試求：

(1) 此三向量所張出的平行六面體體積。（6 分）

(2) 四面體 $O-ABC$ 的體積。（4 分）

**解：**

(1) 平行六面體體積 $= \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \\ 1 & 4 & 16 \end{vmatrix}$ 的絕對值 $=|(2-3)(3-4)(4-2)|=2$

(2) 四面體 $O-ABC$ 的體積 $=\dfrac{1}{6}\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \\ 1 & 4 & 16 \end{vmatrix}$ 的絕對值 $=\dfrac{1}{3}$