第 1 章 極限與函數

1-2 無窮等比級數

1. 求無窮級數 $\frac{1}{1\times4}+\frac{1}{4\times7}+\frac{1}{7\times10}+\cdots+\frac{1}{(3n-2)(3n+1)}+\cdots$ 的和．

解 利用 $\frac{1}{(3k-2)(3k+1)}=\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{3k-2}-\frac{1}{3k+1}\right)$，得

$$S_n=\frac{1}{1\times4}+\frac{1}{4\times7}+\frac{1}{7\times10}+\cdots+\frac{1}{(3n-2)\times(3n+1)}$$

$$=\frac{1}{3}\cdot\left[\left(1-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{7}\right)+\left(\frac{1}{7}-\frac{1}{10}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{3n-2}-\frac{1}{3n+1}\right)\right]$$

$$=\frac{1}{3}\cdot\left(1-\frac{1}{3n+1}\right)=\frac{1}{3}\cdot\frac{3n}{3n+1}=\frac{n}{3n+1},$$

根據無窮級數和的定義，因為 $\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{3n+1}=\frac{1}{3}$，所以

$$\frac{1}{1\times4}+\frac{1}{4\times7}+\frac{1}{7\times10}+\cdots+\frac{1}{(3n-2)(3n+1)}+\cdots=\frac{1}{3}.$$

2. 判斷下列各無窮級數為收斂或發散級數，若為收斂級數，求其和．

(1) $1-\frac{1}{3}+\frac{1}{9}-\frac{1}{27}+\cdots$　(2) $\frac{2}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\cdots$　(3) $9+12+16+\frac{64}{3}+\cdots$

解 (1) 這是一個首項 $a=1$，公比 $r=-\frac{1}{3}$ 的無窮等比級數，因為公比 r 介於 -1 與 1 之間，所以此無窮等比級數為收斂級數且其和為

$$S=\frac{1}{1-\left(-\frac{1}{3}\right)}=\frac{1}{\frac{4}{3}}=\frac{3}{4}.$$

(2) 這是一個首項 $a=\frac{2}{3}$，公比 $r=\frac{1}{2}$ 的無窮等比級數，因為公比 r 介於 -1 與 1 之間，所以此無窮等比級數為收斂級數且其和為

$$S=\frac{\frac{2}{3}}{1-\frac{1}{2}}=\frac{\frac{2}{3}}{\frac{1}{2}}=\frac{4}{3}.$$

(3) 這是一個首項為 9，公比為 $\frac{12}{9}$ 的無窮等比級數，因為公比 $\frac{12}{9}=\frac{4}{3}>1$，所以此無窮等比級數不能求和．

3. 求 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n+(-2)^n}{5^n}$．

解 原式 $=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3}{5}\right)^n+\sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{2}{5}\right)^n=\frac{\frac{3}{5}}{1-\frac{3}{5}}+\frac{-\frac{2}{5}}{1-\left(-\frac{2}{5}\right)}=\frac{3}{2}-\frac{2}{7}=\frac{17}{14}$．

4. 已知無窮等比級數 $a+ar+ar^2+\cdots+ar^{n-1}+\cdots$ 的和為 4，且 $a_2=-3$，求其首項及公比．

解 由題意知 $\begin{cases}\dfrac{a}{1-r}=4\cdots① \\ ar=-3\cdots②\end{cases}$，

將②式除以①式，得 $r(1-r)=-\dfrac{3}{4}$，即 $4r^2-4r-3=0$，

$(2r+1)(2r-3)=0 \quad \Rightarrow \quad r=-\dfrac{1}{2}$ 或 $\dfrac{3}{2}$（不合），

當 $r=-\dfrac{1}{2}$ 時，$a=6$，即首項為 6，公比為 $-\dfrac{1}{2}$．

5. 設等比數列 $\langle a_n\rangle$ 的前 n 項和為 S_n．若首項 $a_1=-1$，且 $\dfrac{S_{10}}{S_5}=\dfrac{31}{32}$，求 $\lim\limits_{n\to\infty}S_n$ 的值．

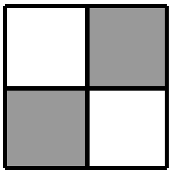
解 設等比級數公比為 r．

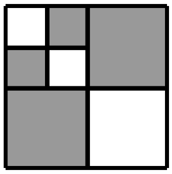
由等比級數公式得知，$S_{10}=\dfrac{-1\left(1-r^{10}\right)}{1-r}$，$S_5=\dfrac{-1\left(1-r^5\right)}{1-r}$．因此，

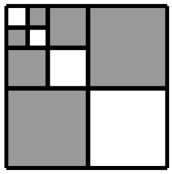
$$\frac{S_{10}}{S_5}=\frac{1-r^{10}}{1-r^5}=\frac{\left(1-r^5\right)\left(1+r^5\right)}{1-r^5}=1+r^5=\frac{31}{32},$$

解得 $r^5=-\dfrac{1}{32} \quad \Rightarrow \quad r=-\dfrac{1}{2}$．故 $\lim\limits_{n\to\infty}S_n=\dfrac{-1}{1-\left(-\dfrac{1}{2}\right)}=-\dfrac{2}{3}$．

6. 一個面積為1024的正方形，先將其等分成 4 個相同的小正方形，並將右上角和左下角的二個正方形塗色，如第1圖．再將第1圖中左上角的小正方形等分成 4 個更小的正方形，並將右上角和左下角的二個正方形塗色，如第 2 圖．依照這樣的規律作成若干圖形．


第1圖


第2圖


第3圖

設 a_n 是第 n 個圖形中白色區域的面積，求

(1) a_1， a_2 ．

(2) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ ．

解 (1)第1圖中塗色部分與白色部分均為原正方形面積的 $\dfrac{1}{2}$，

即均為 $1024\times\dfrac{1}{2}=512$，因此， $a_1=512$ ．

又因為第 2 圖增加的塗色部分為 512 的 $\dfrac{1}{4}$，

所以白色部分將減少 512 的 $\dfrac{1}{4}$，

因此， $a_2=512-512\times\dfrac{1}{4}=38$ ．

(2)以此類推可知：第 n 個圖較第 $n-1$ 個圖減少的白色部分的面積為

$512\left(\dfrac{1}{4}\right)^{n-1}$ ．因此，

$$\lim_{n\to\infty} a_n=512-512\times\frac{1}{4}-512\times\left(\frac{1}{4}\right)^2-\cdots-512\times\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}-\cdots$$

$$=512-512\left[\frac{1}{4}+\left(\frac{1}{4}\right)^2+\cdots+\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}+\cdots\right]$$

$$=512-512\times\frac{\frac{1}{4}}{1-\frac{1}{4}}=512-512\times\frac{1}{3}=\frac{1024}{3}\ .$$

7.　將下列各循環小數化成分數：

(1) $0.\overline{12}$　　　　(2) $0.2\overline{35}$

解 (1) 因為

$$0.\overline{12}=0.121212\cdots=0.12+0.0012+0.000012+\cdots$$

是首項 0.12，公比 0.01的無窮等比級數，所以由求和公式得：

$$0.\overline{12}=\frac{0.12}{1-0.01}=\frac{0.12}{0.99}=\frac{12}{99}=\frac{4}{33}\ .$$

(2) $0.2\overline{35}=0.235353535\cdots$

$$=0.2+(0.035+0.00035+0.0000035+\cdots)$$

$$=0.2+\frac{0.035}{1-0.01}$$

$$=\frac{2}{10}+\frac{35}{990}$$

$$=\frac{233}{990}\ .$$

8.　已知一無窮等比級數的首項為 $0.\overline{3}$，第二項為 $0.\overline{06}$，求此級數的和．

解 首項為 $0.\overline{3}=\frac{3}{9}=\frac{1}{3}$，第二項為 $0.\overline{06}=\frac{6}{99}=\frac{2}{33}$，公比為 $\frac{2}{33}\div\frac{1}{3}=\frac{2}{11}$．

此無窮等比級數的和 $S=\dfrac{\frac{1}{3}}{1-\frac{2}{11}}=\dfrac{11}{27}$ ．

9. 已知對於每一個正整數 n，數列 $\langle a_n \rangle$ 滿足 $n^2-2n+3 \le n^2 a_n \le n^2+2n+4$，求 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

解 由 $n^2-2n+3 \le n^2 a_n \le n^2+2n+4$ 可得 $\dfrac{n^2-2n+3}{n^2} \le a_n \le \dfrac{n^2+2n+4}{n^2}$.

因為 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2-2n+3}{n^2}=1$，$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2+2n+4}{n^2}=1$，所以由夾擠定理可知：$\lim\limits_{n\to\infty} a_n=1$.

10. 利用不等式 $\dfrac{n}{n^2+n} \le \dfrac{n}{n^2+k} \le \dfrac{n}{n^2+1}$，$k=1$，$2$，$3$，$\cdots$，$n$，求 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n}{n^2+1}+\dfrac{n}{n^2+2}+\cdots+\dfrac{n}{n^2+n}\right)$.

解 利用不等式 $\dfrac{n}{n^2+n} \le \dfrac{n}{n^2+k} \le \dfrac{n}{n^2+1}$，

得 $\dfrac{n}{n^2+n} \le \dfrac{n}{n^2+1} \le \dfrac{n}{n^2+1}$，

$\dfrac{n}{n^2+n} \le \dfrac{n}{n^2+2} \le \dfrac{n}{n^2+1}$，

$\vdots$

$\dfrac{n}{n^2+n} \le \dfrac{n}{n^2+n} \le \dfrac{n}{n^2+1}$，

將所有不等式相加，得 $\dfrac{n^2}{n^2+n} \le \dfrac{n}{n^2+1}+\dfrac{n}{n^2+2}+\cdots+\dfrac{n}{n^2+n} \le \dfrac{n^2}{n^2+1}$，

因為 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2}{n^2+n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{1+\frac{1}{n}}=$ ，且 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2}{n^2+1}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{1+\frac{1}{n^2}}=$ ；

所以由夾擠定理，得 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n}{n^2+1}+\dfrac{n}{n^2+2}+\cdots+\dfrac{n}{n^2+n}\right)=1$.