1-3　空間向量的內積

重點一　空間向量的內積

例題 1

設 $\overrightarrow{a}=(2,1,1)$，$\overrightarrow{b}=(1,-3,2)$，試求：

(1) $\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}=$________。(5 分)

(2) $(2\overrightarrow{a}-\overrightarrow{b})\cdot(\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b})=$________。(5 分)

解 (1) $\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}=2\times1+1\times(-3)+1\times2=1$

(2) $2\overrightarrow{a}-\overrightarrow{b}=2(2,1,1)-(1,-3,2)=(3,5,0)$

$\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}=(3,-2,3)$

$(2\overrightarrow{a}-\overrightarrow{b})\cdot(\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b})=3\times3+5\times(-2)+0\times3=-1$

例題 2

坐標空間中有一三角形 ABC，$A(1,1,1)$，$B(2,0,1)$，$C(1,2,0)$，試求：

(1) $\angle BAC=$________。(5 分)

(2) $\triangle ABC$ 面積為________。(5 分)

解 $\overrightarrow{AB}=(1,-1,0)$，$\overrightarrow{AC}=(0,1,-1)$

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=1\times0+(-1)\times1+0\times(-1)=-1$

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AC}|\cos\angle BAC$

$\Rightarrow -1=\sqrt{2}\times\sqrt{2}\times\cos\angle BAC$

$\Rightarrow \cos\angle BAC=-\dfrac{1}{2}$

(1) $\angle BAC=120°$

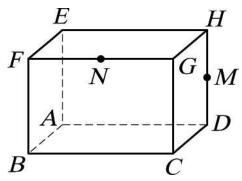
(2) $\sin\angle BAC=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$\triangle ABC$ 面積為 $\dfrac{1}{2}|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AC}|\sin\angle BAC$

$=\dfrac{1}{2}\times\sqrt{2}\times\sqrt{2}\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

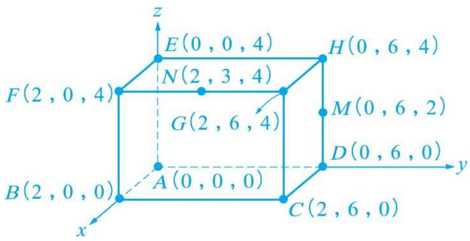
例題 3

如右圖，長方體 $ABCD-EFGH$ 的長、寬、高分別為 $\overline{AD}=6$、$\overline{AB}=2$、$\overline{AE}=4$，若 M 為 $\overline{DH}$ 的中點，N 為 $\overline{FG}$ 的中點，則



$\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{BN}=$________。（10 分）

解　建立空間坐標系，如右圖



$A(0,0,0)$，

$B(2,0,0)$，

$M(0,6,2)$，

$N(2,3,4)$

則 $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{BN}=(0,6,2)\cdot(0,3,4)$

$=0+18+8=26$

例題 4

空間中兩向量 $\overrightarrow{AB}$ 與 $\overrightarrow{CD}$ 之間的夾角是 60°且大小分別是 1 與 2，試求：

(1) $|\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{CD}|$

(2) $|2\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{CD}|$

解　(1) $|\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{CD}|^2=(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{CD})\cdot(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{CD})$

$=|\overrightarrow{AB}|^2-2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}+|\overrightarrow{CD}|^2$

$=1-2\times1\times2\times\cos60°+4=3$

$\therefore|\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{CD}|=\sqrt{3}$

(2) $|2\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{CD}|^2=(2\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{CD})\cdot(2\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{CD})$

$=4|\overrightarrow{AB}|^2-4\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}+|\overrightarrow{CD}|^2$

$=4\times1-4\times1\times2\times\cos60°+4=4$

$\therefore|2\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{CD}|=2$

例題 5

設 $\vec{a}$，$\vec{b}$ 為空間中兩向量，

(1) 若 $|\vec{a}+\vec{b}|=5$，$|\vec{a}-\vec{b}|=3$，則 $\vec{a}\cdot\vec{b}=$________。(5 分)

(2) 若 $2\vec{a}+\vec{b}=\vec{0}$，$|\vec{a}|=1$，則 $\vec{a}\cdot\vec{b}=$________。(5 分)

解　(1) $\begin{cases} |\vec{a}-\vec{b}|^2=|\vec{a}|^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2=25 \cdots\cdots ① \\ |\vec{a}-\vec{b}|^2=|\vec{a}|^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2=9 \cdots\cdots ② \end{cases}$

由①－②得 $4\vec{a}\cdot\vec{b}=16$　$\therefore \vec{a}\cdot\vec{b}=4$

(2) 由 $2\vec{a}+\vec{b}=\vec{0}$ 得 $\vec{b}=-2\vec{a}$

並得知 $\vec{a}$，$\vec{b}$ 反向，且 $|\vec{b}|=2|\vec{a}|=2$

故 $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos180°=1\times2\times(-1)=-2$

例題 6

已知坐標空間中，$A(1,2,1)$，$B(-1,2,1)$ 兩點，設點 P 是 y 軸上一點，若 $\overrightarrow{PA}\perp\overrightarrow{PB}$，試求 P 點坐標。(10 分)

解　設 P 點坐標為 $(0,t,0)$

因為 $\overrightarrow{PA}=(1,2-t,1)$，$\overrightarrow{PB}=(-1,2-t,1)$，且 $\overrightarrow{PA}\perp\overrightarrow{PB}$

所以 $\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}=0$

因此 $1\times(-1)+(2-t)\times(2-t)+1\times1=0 \Rightarrow t^2-4t+4=0$

得 $t=2$，故 P 點坐標為 $(0,2,0)$

例題 7

設空間中兩向量$\vec{a}$，$\vec{b}$滿足｜$\vec{b}$｜＝2｜$\vec{a}$｜，且$\vec{a}+\vec{b}$與$5\vec{a}-2\vec{b}$垂直，則$\vec{a}$與$\vec{b}$夾角的餘弦值為________。(10 分)

解　∵$\vec{a}+\vec{b}$與$5\vec{a}-2\vec{b}$垂直

$\therefore (\vec{a}+\vec{b})\cdot(5\vec{a}-2\vec{b})=0$

⇨ $5|\vec{a}|^2+3\vec{a}\cdot\vec{b}-2|\vec{b}|^2=0$，又$|\vec{b}|=2|\vec{a}|$

因此 $5|\vec{a}|^2+3\vec{a}\cdot\vec{b}-8|\vec{a}|^2=0$ ⇨ $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|^2$

故 $\cos\theta=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\,|\vec{b}|}=\dfrac{|\vec{a}|^2}{|\vec{a}|\times 2|\vec{a}|}=\dfrac{1}{2}$

重點二　柯西不等式

例題 8

若 x，y，z 是實數，$\vec{a}=(x,y,z)$，$\vec{b}=(1,2,2)$且$\vec{a}\cdot\vec{b}=9$，求$|\vec{a}|$的最小值，及當最小值發生時，x，y，z 的值。(10 分)

解　(1) $|\vec{a}|^2=x^2+y^2+z^2$，$|\vec{b}|^2=1^2+2^2+2^2=9$，$\vec{a}\cdot\vec{b}=x+2y+2z=9$

由柯西不等式知 $(x^2+y^2+z^2)(1^2+2^2+2^2)\ge(x+2y+2z)^2$

即 $(x^2+y^2+z^2)\times 9\ge 9^2$ ⇨ $x^2+y^2+z^2\ge 9$

$\therefore x^2+y^2+z^2$的最小值為 9 ⇨ $|\vec{a}|$的最小值為 3

(2)當$\dfrac{x}{1}=\dfrac{y}{2}=\dfrac{z}{2}$時，等號成立

令$\dfrac{x}{1}=\dfrac{y}{2}=\dfrac{z}{2}=t$，即 $x=t$，$y=2t$，$z=2t$，

代入 $x+2y+2z=9$，得 $t=1$

故 $x^2+y^2+z^2$ 的最小值為 9 時，$x=1$，$y=2$，$z=2$

例題 9

若 x，y，z 為實數，滿足 $(x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2=4$，試求 $x+2y+2z$ 的範圍為________。

解　由柯西不等式知

$[(x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2](1^2+2^2+2^2)\geq[(x-1)+(2y-4)+(2z-6)]^2$

即 $4\times9\geq(x+2y+2z-11)^2\Rightarrow-6\leq x+2y+2z-11\leq6$

故 $5\leq x+2y+2z\leq17$

重點三　正射影

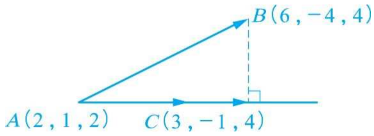
例題 10

空間中三點 $A(2,1,2)$，$B(6,-4,4)$，$C(3,-1,4)$，試求：

(1) $\overrightarrow{AB}$ 在 $\overrightarrow{AC}$ 上之正射影為________。(6 分)

(2) $\overrightarrow{AB}$ 在 $\overrightarrow{AC}$ 上之正射影長為________。(4 分)

解　$\overrightarrow{AB}=(4,-5,2)$，$\overrightarrow{AC}=(1,-2,2)$



(1) $\left(\dfrac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AC}|^2}\right)\overrightarrow{AC}$

$=\left(\dfrac{(4,-5,2)\cdot(1,-2,2)}{9}\right)(1,-2,2)$

$=(2,-4,4)$

(2) 正射影長為 $|(2,-4,4)|=\sqrt{2^2+(-4)^2+4^2}=6$