習題 3-4 詳解

一、基本題

1. 設 $A=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & -2\end{bmatrix}$，試求：

(1) P（-2，2）經過 A 變換後的點坐標。

(2) 哪一點經過 A 變換後為點（-1，21）。

解 (1) $\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & -2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-2\\ 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\\ -10\end{bmatrix}$，故得（$2$，$-10$）。

(2) $\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & -2\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}-1\\ 21\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1}{4} & \frac{1}{4}\\ \frac{3}{8} & -\frac{1}{8}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1\\ 21\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5\\ -3\end{bmatrix}$，故得（$5$，$-3$）。

2. 設矩陣 $A=\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}$將$\begin{bmatrix}u\\ v\end{bmatrix}$變換為$\begin{bmatrix}3u+4v\\ -u+5v\end{bmatrix}$，試求矩陣 A。

解 依題意得 $\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u\\ v\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3u+4v\\ -u+5v\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{bmatrix}au+bv\\ cu+dv\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3u+4v\\ -u+5v\end{bmatrix}$，

故 $A=\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3 & 4\\ -1 & 5\end{bmatrix}$。

3. 試描述下列各線性變換的作用。

(1) $\begin{bmatrix}3 & 0\\ 0 & 4\end{bmatrix}$。　(2) $\begin{bmatrix}1 & 0\\ 4 & 1\end{bmatrix}$。　(3) $\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1 & 1\\ -1 & 1\end{bmatrix}$。　(4) $\frac{1}{2}\begin{bmatrix}\sqrt{3} & -1\\ 1 & \sqrt{3}\end{bmatrix}$。

解 (1) 分別將 x，y 坐標伸縮為 3，4 倍。

(2) 沿著 y 軸方向推移 x 坐標 4 倍。

(3) 旋轉$-45°$。

(4) 旋轉 $30°$。

4. 試求以原點為中心將點 A（2，4）旋轉 $60°$ 後的坐標。

解 $\begin{bmatrix}\cos 60° & -\sin 60°\\ \sin 60° & \cos 60°\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\ 4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1-2\sqrt{3}\\ \sqrt{3}+2\end{bmatrix}$，故變換後的新坐標為（$1-2\sqrt{3}$，$\sqrt{3}+2$）。

5. 設 $A=\begin{bmatrix}1&4\\0&1\end{bmatrix}$，

(1) 試求 A 的乘法反方陣 A^{-1}。

(2) 解釋 A 所代表的線性變換的作用。

(3) 解釋 A^{-1} 所代表的線性變換的作用。

解　(1) $A^{-1}=\dfrac{1}{1}\begin{bmatrix}1&-4\\0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&-4\\0&1\end{bmatrix}$。

(2) A 表示沿著 x 軸方向推移 y 坐標 4 倍。

(3) A^{-1} 表示沿著 x 軸方向推移 y 坐標（-4）倍。

若圖形經過 A 的推移後得到新圖形，透過 A^{-1} 可將新圖形推移回原圖形。

二、進階題

6. $A=\begin{bmatrix}2&1\\3&-1\end{bmatrix}$將直線 $x-y=2$ 變成哪一條直線？

解　$x-y=2$ 上取兩點（2，0）、（0，-2），

$$\begin{bmatrix}2&1\\3&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4\\6\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}2&1\\3&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\-2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2\\2\end{bmatrix}。$$

過（4，6）、（-2，2）的直線方程式為

$$\frac{y-2}{x+2}=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}，$$

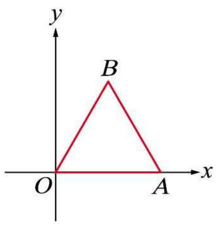
故 $2x+4=3y-6 \Rightarrow 2x-3y=-10$。

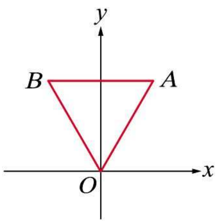
7. 試求一矩陣 A，使 A 的變換將 P（1，2）變為 P'（3，4），將 Q（2，1）變為 Q'（-1，3）。

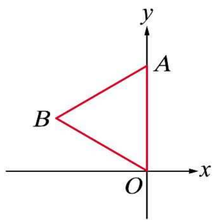
解　由 $A\begin{bmatrix}1&2\\2&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3&-1\\4&3\end{bmatrix}$，故 $A=\begin{bmatrix}3&-1\\4&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&2\\2&1\end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix}-\frac{5}{3}&\frac{7}{3}\\\frac{2}{3}&\frac{5}{3}\end{bmatrix}$。

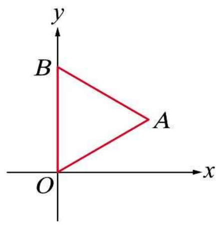
8. 如下圖，正三角形 OAB，請選出經矩陣

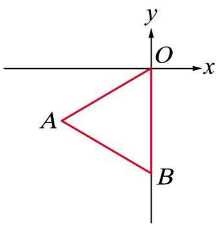
$A=\begin{bmatrix}\frac{\sqrt{3}}{2}&-\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}&\frac{\sqrt{3}}{2}\end{bmatrix}$之線性變換後之圖形：

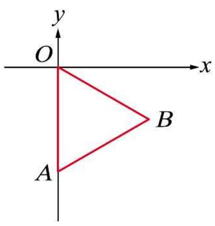


(A) 

(B) 

(C) 

(D) 

(E) 

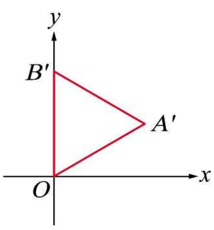
解　設三角形邊長為 a，

$$\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a \\ 0 \end{bmatrix}=a\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{a}{2} \\ \frac{\sqrt{3}a}{2} \end{bmatrix}=a\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}。$$

$A'\left(\frac{\sqrt{3}}{2}，\frac{1}{2}\right)a$，$B'(0，1)a$，

故變換後圖形應為(C)。



9. (1) 證明：

$$\begin{bmatrix} \cos\theta_2 & -\sin\theta_2 \\ \sin\theta_2 & \cos\theta_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \cos\theta_1 & -\sin\theta_1 \\ \sin\theta_1 & \cos\theta_1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \cos(\theta_1+\theta_2) & -\sin(\theta_1+\theta_2) \\ \sin(\theta_1+\theta_2) & \cos(\theta_1+\theta_2) \end{bmatrix}。$$

(2) 承(1)，用線性變換的觀點解釋上式。

(3) 若 $A=\begin{bmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix}$，且 $A^3=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$，試求 A。（有三解）

證　(1) 直接計算可得。

(2) 旋轉 θ_1，再旋轉 θ_2，即為旋轉 $\theta_1+\theta_2$。

(3) $A=\begin{bmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix}$，故 $A^3=\begin{bmatrix}\cos3\theta & -\sin3\theta\\ \sin3\theta & \cos3\theta\end{bmatrix}$，

因此 $\cos3\theta=1$，$\sin3\theta=0$，

得 $3\theta=2k\pi$，$k=0$，1，2，

即 $\theta=\dfrac{2k\pi}{3}$，$k=0$，1，2，

所以 $A=\begin{bmatrix}\cos0 & -\sin0\\ \sin0 & \cos0\end{bmatrix}$或$\begin{bmatrix}\cos\frac{2\pi}{3} & -\sin\frac{2\pi}{3}\\ \sin\frac{2\pi}{3} & \cos\frac{2\pi}{3}\end{bmatrix}$或$\begin{bmatrix}\cos\frac{4\pi}{3} & -\sin\frac{4\pi}{3}\\ \sin\frac{4\pi}{3} & \cos\frac{4\pi}{3}\end{bmatrix}$

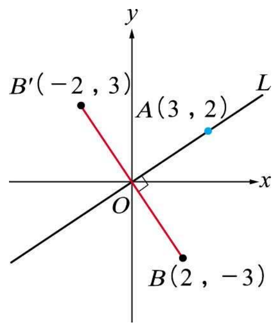
$=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$或$\begin{bmatrix}-\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2}\\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2}\end{bmatrix}$或$\begin{bmatrix}-\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2}\\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2}\end{bmatrix}$。

三、挑戰題

10. 令 L 為過原點 O（0，0）及 A（3，2）的直線。試求代表「對 L 作鏡射」的線性變換的二階方陣 T。

解　$T:\begin{bmatrix}3\\2\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}3\\2\end{bmatrix}$，$T:\begin{bmatrix}2\\-3\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}-2\\3\end{bmatrix}$

⇨ $T\begin{bmatrix}3 & 2\\ 2 & -3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3 & -2\\ 2 & 3\end{bmatrix}$，



故 $T=\begin{bmatrix}3 & -2\\ 2 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3 & 2\\ 2 & -3\end{bmatrix}^{-1}$

$=\begin{bmatrix}3 & -2\\ 2 & 3\end{bmatrix}\cdot\dfrac{1}{(-13)}\begin{bmatrix}-3 & -2\\ -2 & 3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{5}{13} & \frac{12}{13}\\ \frac{12}{13} & -\frac{5}{13}\end{bmatrix}$。