習題 3-3 詳解

一、基本題

1. 下列何者是轉移矩陣？

(A) $\begin{bmatrix} 0.1 & 0.7 \\ 0.9 & 0.3 \end{bmatrix}$　(B) $\begin{bmatrix} 0.3 & 0.7 \\ 0.9 & 0.1 \end{bmatrix}$　(C) $\begin{bmatrix} \sqrt{2}-1 & 3-\sqrt{5} \\ 2-\sqrt{2} & \sqrt{5}-2 \end{bmatrix}$　(D) $\begin{bmatrix} -1 & 0.5 \\ 2 & 0.5 \end{bmatrix}$

解　因為轉移矩陣的性質為「每一個元都介於 0 與 1 的實數」及「每一行的各元之和都等於 1」，故選(A)(C)。

2. (1) 試求$\begin{bmatrix} -4 & 6 \\ -3 & 7 \end{bmatrix}$的乘法反方陣。

(2) 若 $A=\begin{bmatrix} 1 & k \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$，試求 A^{-1}。

解　(1) $\dfrac{1}{(-10)}\begin{bmatrix} 7 & -6 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -\dfrac{7}{10} & \dfrac{3}{5} \\ -\dfrac{3}{10} & \dfrac{2}{5} \end{bmatrix}$。

(2) $A^{-1}=\dfrac{1}{(-1)}\begin{bmatrix} -1 & -k \\ 0 & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & k \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$。

3. 將$\begin{cases} 5x+4y-5=0 \\ 3x-2y+7=0 \end{cases}$寫成 $AX=B$ 的形式，並利用乘法反方陣解此方程組。

解　$\begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 5 \\ -7 \end{bmatrix}$，故 $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} 5 \\ -7 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \dfrac{1}{11} & \dfrac{2}{11} \\ \dfrac{3}{22} & -\dfrac{5}{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 5 \\ -7 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -\dfrac{9}{11} \\ \dfrac{25}{11} \end{bmatrix}$。

4. 下列哪些方陣有乘法反方陣？

(A) $\begin{bmatrix} \sqrt{2} & \sqrt{3} \\ \sqrt{5} & \sqrt{7} \end{bmatrix}$　(B) $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$　(C) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$　(D) $\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 8 \end{bmatrix}$

解　因為$\begin{vmatrix} \sqrt{2} & \sqrt{3} \\ \sqrt{5} & \sqrt{7} \end{vmatrix}=\sqrt{14}-\sqrt{15}\neq 0$，$\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}=0$，$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}=0$，$\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 8 \end{vmatrix}=-8\neq 0$，故選(A)(D)。

5. 根據過去經驗可知，若小嘉這次考試及格，下次也及格的機率為 0.7，若這次不及格，下次也不及格的機率為 0.4。
   (1) 寫出小嘉考試結果的轉移矩陣。
   (2) 穩定狀態時，小嘉及格的機率為何？

解　(1)　小嘉考試結果的轉移矩陣為 $A=\begin{bmatrix}0.7 & 0.6\\ 0.3 & 0.4\end{bmatrix}$。

(2)　假設穩定狀態時，及格的機率為 a，不及格的機率為 b，

且 $a+b=1$，$a\geqq 0$，$b\geqq 0$。

$\begin{bmatrix}0.7 & 0.6\\ 0.3 & 0.4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a\\ b\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a\\ b\end{bmatrix}$，$\begin{cases}0.6b=0.3a\\ a+b=1\end{cases}$ ⇨ $a=\dfrac{2}{3}$，故穩定狀態時，

小嘉及格的機率為 $\dfrac{2}{3}$。

二、進階題

6. 試求 k 的範圍使得 $A=\begin{bmatrix}1-k & 2\\ 4 & 3-k\end{bmatrix}$有乘法反方陣。

解　$\begin{vmatrix}1-k & 2\\ 4 & 3-k\end{vmatrix}\neq 0 \Leftrightarrow k^2-4k-5\neq 0$，故 $k\neq -1$，5。

7. 設 A，B 是兩個 2×2 階的轉移矩陣，且 X 為一個 2×1 階的機率向量，$Y=AX$，請問下列哪些敘述是正確的？

(A) A^2 是轉移矩陣　　(B) AB 不是轉移矩陣

(C) $\dfrac{1}{2}(A+B)$是轉移矩陣　　(D) Y 是 2×1 階的機率向量

(E) A^{-1} 是轉移矩陣

解　(A)　○：A 是轉移矩陣 ⇨ A^2 也是

(B)　×：A，B 是轉移矩陣 ⇨ AB 也是

(C)　○：$\dfrac{1}{2}(A+B)$的每一行皆為機率向量，因此 $\dfrac{1}{2}(A+B)$是轉移矩陣

(D)　○：A 是轉移矩陣，X 是機率向量 ⇨ AX 是機率向量

(E)　×：考慮 $\begin{bmatrix}1 & \frac{1}{2}\\ 0 & \frac{1}{2}\end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix}1 & -1\\ 0 & 2\end{bmatrix}$，故 A^{-1} 不是轉移矩陣

故選(A)(C)(D)。

8. 假設有一學生，他的讀書習慣是：如果他在今晚讀書，則他在明晚有 60 ％ 的機率不讀書；如果他在今晚不讀書，則他在明晚有 50 ％ 的機率不讀書。

(1) 試求其晚上讀書的轉移矩陣為何？

(2) 若已知他在星期一讀書，則他兩天後（星期三）讀書的機率為何？

(3) 就長期而言，他晚上讀書的機率為何？

解　(1) 轉移矩陣為 $A=\begin{bmatrix}0.4 & 0.5\\0.6 & 0.5\end{bmatrix}$。

(2) $X_1=\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$，$X_2=AX_1=\begin{bmatrix}0.4 & 0.5\\0.6 & 0.5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0.4\\0.6\end{bmatrix}$，$X_3=AX_2=\begin{bmatrix}0.4 & 0.5\\0.6 & 0.5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0.4\\0.6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0.46\\0.54\end{bmatrix}$，

所以，星期三讀書的機率為 0.46。

(3) 設穩定狀態的矩陣為 $X=\begin{bmatrix}a\\b\end{bmatrix}$

由馬可夫定理知 $AX=X$，且 $a+b=1$，

得$\begin{bmatrix}0.4 & 0.5\\0.6 & 0.5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a\\b\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a\\b\end{bmatrix}$，即$\begin{bmatrix}0.4a+0.5b\\0.6a+0.5b\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a\\b\end{bmatrix}$，

整理得 $0.6a-0.5b=0$，即 $a=\dfrac{5}{6}b$，再與 $a+b=1$ 聯立，解得 $a=\dfrac{5}{11}$，

故長期而言，晚上讀書的機率為$\dfrac{5}{11}$。

9. 設 $A^3=\begin{bmatrix}-7 & -2\\10 & 3\end{bmatrix}$，$A^5=\begin{bmatrix}-18 & -5\\25 & 7\end{bmatrix}$，試求 A^2。

解　因為 $A^5=A^3\times A^2$，

所以 $A^2=(A^3)^{-1}\times A^5=\begin{bmatrix}-7 & -2\\10 & 3\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}-18 & -5\\25 & 7\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4 & 1\\-5 & -1\end{bmatrix}$。

三、挑戰題

10. 本題是矩陣運算在密碼學的應用。首先利用矩陣將英文字母編碼，規定 a，b，c，…，y，z 分別以$\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$、$\begin{bmatrix}0\\2\end{bmatrix}$、$\begin{bmatrix}0\\3\end{bmatrix}$、…、$\begin{bmatrix}2\\5\end{bmatrix}$、$\begin{bmatrix}2\\6\end{bmatrix}$表示，再把所得的矩陣依序排列。例如將單字“*car*”編碼成為矩陣$\begin{bmatrix}0 & 0 & 1\\3 & 1 & 8\end{bmatrix}$。小偉與小芬為了保密，約定將欲傳送的單字先編成矩陣 X，另選取一個二階方陣 $A=\begin{bmatrix}1 & 3\\2 & 5\end{bmatrix}$，再將 AX 的結果傳給對方。假設小芬收到的矩陣是$\begin{bmatrix}7 & 16 & 8 & 15\\12 & 27 & 14 & 25\end{bmatrix}$，則小偉傳送的單字為何？

解　假設 $B=\begin{bmatrix} 7 & 16 & 8 & 15 \\ 12 & 27 & 14 & 25 \end{bmatrix}$

因 $AX=B \Rightarrow X=A^{-1}B=\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} 7 & 16 & 8 & 15 \\ 12 & 27 & 14 & 25 \end{bmatrix}$

$$=\begin{bmatrix} -5 & 3 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 7 & 16 & 8 & 15 \\ 12 & 27 & 14 & 25 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & 2 & 5 \end{bmatrix}。$$

即傳送的單字為 *love*。