習題 3-1 詳解

一、基本題

1. 利用高斯消去法解下列線性方程組：

(1) $\begin{cases} x-2y+z=3 \\ 3x-y+2z=1 \\ 7x-4y+5z=4 \end{cases}$。　　(2) $\begin{cases} x-y+2z=4 \\ 2x-y+2z=1 \\ 5x-3y+6z=6 \end{cases}$。

解　(1) $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 3 \\ 3 & -1 & 2 & 1 \\ 7 & -4 & 5 & 4 \end{array}\right] \times(-3) \times(-7) \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & 5 & -1 & -8 \\ 0 & 10 & -2 & -17 \end{array}\right] \times(-2)$

$\rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & 5 & -1 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right]$，化簡得方程組$\begin{cases} x-2y+z=3 \\ 5y-z=-8 \\ 0=-1 \end{cases}$，故無解。

(2) $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 4 \\ 2 & -1 & 2 & 1 \\ 5 & -3 & 6 & 6 \end{array}\right] \times(-2) \times(-5) \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & -2 & -7 \\ 0 & 2 & -4 & -14 \end{array}\right] \times(-2)$

$\Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & -2 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$，化簡得方程組$\begin{cases} x-y+2z=4 \\ y-2z=-7 \end{cases}$，

故解為$\begin{cases} x=-3 \\ y=-7+2t \\ z=t \end{cases}$，$t$ 為實數。

2. 若矩陣$\left[\begin{array}{cc|c} -4 & 6 & a \\ 3 & -7 & b \end{array}\right]$作若干次列運算後得$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{array}\right]$，則數對（$a$，$b$）＝？

解　由$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{array}\right]$可得$\begin{cases} x+0y=1 \\ 0x+y=1 \end{cases}$，因矩陣在列運算前後所對應的方程組有相同的解，

故$\left[\begin{array}{cc|c} -4 & 6 & a \\ 3 & -7 & b \end{array}\right]$表示$\begin{cases} -4x+6y=a \\ 3x-7y=b \end{cases}$的解為$\begin{cases} x=1 \\ y=1 \end{cases}$，

得$\begin{cases} a=2 \\ b=-4 \end{cases}$，故數對（$a$，$b$）＝（2，－4）。

3. 下列哪些增廣矩陣所表示的一次方程組恰有一組解？

(A) $\left[\begin{array}{ccc|c}1&0&0&2\\0&2&0&3\\0&0&1&-4\end{array}\right]$　(B) $\left[\begin{array}{ccc|c}1&2&3&4\\0&2&3&5\\0&0&1&1\end{array}\right]$　(C) $\left[\begin{array}{ccc|c}1&2&3&4\\4&3&2&1\\0&0&0&5\end{array}\right]$

(D) $\left[\begin{array}{ccc|c}1&2&3&4\\0&3&2&0\\0&0&0&0\end{array}\right]$　(E) $\left[\begin{array}{ccc|c}1&2&3&0\\0&3&0&0\\0&0&1&0\end{array}\right]$

解　(A) ○：恰有一組解（x，y，z）＝$\left(2，\dfrac{3}{2}，-4\right)$

(B) ○：恰有一組解（x，y，z）＝（－1，1，1）

(C) ×：無解

(D) ×：有無限多組解

(E) ○：恰有一組解（x，y，z）＝（0，0，0）

故選(A)(B)(E)。

4. 利用高斯消去法解線性方程組$\begin{cases}x+\ \ y-2z=5\\2x+3y+4z=2\end{cases}$

解　$\left[\begin{array}{ccc|c}1&1&-2&5\\2&3&4&2\end{array}\right]\xrightarrow{\times(-2)}\left[\begin{array}{ccc|c}1&1&-2&5\\0&1&8&-8\end{array}\right]$，

化簡得方程組$\begin{cases}x+y-2z=5\\\quad\ \ y+8z=-8\end{cases}$，故解為$\begin{cases}x=13+10t\\y=-8-8t\\z=t\end{cases}$，$t$ 為實數。

二、進階題

5. 若矩陣$\left[\begin{array}{ccc|c}1&c&3&7\\0&1&1&b\\0&2&a&5\end{array}\right]$經過一系列的列運算後可以化成$\left[\begin{array}{ccc|c}1&2&3&7\\0&1&1&2\\0&0&1&1\end{array}\right]$，試求序組（$a$，$b$，$c$）。

解　方程組經列運算前後有相同解，

故由$\begin{cases}x+2y+3z=7\\\quad\ \ y+\ z=2\\\qquad\quad z=1\end{cases}$，解得$\begin{cases}x=2\\y=1\\z=1\end{cases}$，所以$\begin{cases}x+cy+3z=7\\\quad\ \ y+\ z=b\\\ \ 2y+az=5\end{cases}$的解為$\begin{cases}x=2\\y=1\\z=1\end{cases}$。

因此$\begin{cases}2+c+3=7\\ 1+1=b\\ 2+a=5\end{cases}$，得$\begin{cases}a=3\\ b=2\\ c=2\end{cases}$，故序組（$a$，$b$，$c$）＝（3，2，2）。

6. 下列哪些選項中的矩陣經過一系列的列運算後可以化成$\left[\begin{array}{ccc|c}1&2&3&-1\\0&1&1&0\\0&0&1&-1\end{array}\right]$？

(A) $\left[\begin{array}{ccc|c}-1&1&1&0\\2&1&1&0\\5&-3&-3&0\end{array}\right]$　(B) $\left[\begin{array}{ccc|c}1&2&3&-1\\0&1&1&0\\0&2&3&-1\end{array}\right]$　(C) $\left[\begin{array}{ccc|c}1&1&2&5\\1&-1&1&2\\1&1&2&5\end{array}\right]$

(D) $\left[\begin{array}{ccc|c}2&1&3&6\\1&-1&1&0\\-2&2&-2&1\end{array}\right]$　(E) $\left[\begin{array}{ccc|c}1&3&2&7\\0&1&1&2\\0&1&0&1\end{array}\right]$

解　(A) ×：有無限多組解

(B) ○：恰有一組解 $x=0$，$y=1$，$z=-1$，與原方程組的解相同

(C) ×：有無限多組解

(D) ×：無解，與原方程組（恰有一組解 $x=0$，$y=1$，$z=-1$）不同

(E) ×：恰有一組解 $x=2$，$y=1$，$z=1$，故選(B)。

7. 解方程組作矩陣列運算最後得到$\left[\begin{array}{ccc|c}1&2&3&1\\0&1&2&2\\0&0&a&b\end{array}\right]$，試就 a，b 討論解。

解　$\left[\begin{array}{ccc|c}1&2&3&1\\0&1&2&2\\0&0&a&b\end{array}\right]$對應方程組$\begin{cases}x+2y+3z=1\\ y+2z=2\\ az=b\end{cases}$。

(1) 若 $a=0$，$b=0$，則

$\begin{cases}x+2y+3z=1\\ y+2z=2\end{cases}$ ⇨ $\begin{cases}x=-3+t\\ y=2-2t\\ z=t\end{cases}$，$t$ 為實數，

為無限多組解。

(2) 若 $a=0$，$b\neq0$，則$0z=b$ 為矛盾式，故無解。

(3) 若 $a\neq 0$，則

可得 $z=\dfrac{b}{a}$ 代回上兩式可求得 $y=2-\dfrac{2b}{a}$，$x=-3+\dfrac{b}{a}$，

故恰有一解。

8. 設 a，b，c 為實數，考慮線性方程組 $\begin{cases} x+2y+az=1 \\ 3x+4y+bz=-1 \\ 2x+10y+7z=c \end{cases}$，若此線性方程組恰有一組解，則 a，b，c 的條件為何？

解　利用高斯消去法求解，

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & a & 1 \\ 3 & 4 & b & -1 \\ 2 & 10 & 7 & c \end{array}\right] \xrightarrow{\times(-3),\ \times(-2)} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & a & 1 \\ 0 & -2 & -3a+b & -4 \\ 0 & 6 & -2a+7 & c-2 \end{array}\right] \xrightarrow{\times 3}$$

$$\rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & a & 1 \\ 0 & -2 & -3a+b & -4 \\ 0 & 0 & -11a+3b+7 & c-14 \end{array}\right],$$

故若 $-11a+3b+7\neq 0$，則方程組恰有一組解。

三、挑戰題

9. 已知兩方程組 $\begin{cases} x-2y+3z=5 \\ 2x+y-3z=-3 \\ ax+3y+z=7 \end{cases}$ 與 $\begin{cases} x+by-z=2 \\ 4x-3y+cz=-1 \\ 3x-y+2z=6 \end{cases}$ 有相同的解，試求 a，b，c 之值。

解　已知兩方程組 $\begin{cases} x-2y+3z=5 \\ 2x+y-3z=-3 \\ ax+3y+z=7 \end{cases}$ 與 $\begin{cases} x+by-z=2 \\ 4x-3y+cz=-1 \\ 3x-y+2z=6 \end{cases}$ 有相同的解，

所以此解也為方程組 $\begin{cases} x-2y+3z=5 \\ 2x+y-3z=-3 \\ 3x-y+2z=6 \end{cases}$ 的解，得 $x=1$，$y=1$，$z=2$，

代回原方程組得 $a=2$，$b=3$，$c=-1$。