習題 1-4 詳解

一、基本題

1. 已知 $\vec{a}=(2,1,3)$，$\vec{b}=(1,3,2)$，試求：

(1) $\vec{a}\times\vec{b}$。　　(2) $2\vec{b}\times 3\vec{a}$。

解：(1) $\vec{a}\times\vec{b}=\left(\begin{vmatrix}1&3\\3&2\end{vmatrix},\begin{vmatrix}3&2\\2&1\end{vmatrix},\begin{vmatrix}2&1\\1&3\end{vmatrix}\right)=(-7,-1,5)$。

(2) $2\vec{b}\times 3\vec{a}=(2,6,4)\times(6,3,9)=\left(\begin{vmatrix}6&4\\3&9\end{vmatrix},\begin{vmatrix}4&2\\9&6\end{vmatrix},\begin{vmatrix}2&6\\6&3\end{vmatrix}\right)$

$=(42,6,-30)$。

2. 已知坐標空間中三點 $A(2,2,1)$，$B(1,3,1)$，$C(3,5,5)$，試求：

(1)向量 $\overline{AB}$ 和 $\overline{AC}$ 的外積 $\overline{AB}\times\overline{AC}$。

(2) $\overline{AB}$ 和 $\overline{AC}$ 所張出的平行四邊形面積。

解：$\overline{AB}=(-1,1,0)$，$\overline{AC}=(1,3,4)$，

(1) $\left(\begin{vmatrix}1&0\\3&4\end{vmatrix},\begin{vmatrix}0&-1\\4&1\end{vmatrix},\begin{vmatrix}-1&1\\1&3\end{vmatrix}\right)=(4,4,-4)$。

(2) $\left|\overline{AB}\times\overline{AC}\right|=4\sqrt{3}$。

3. 已知坐標空間中，$A(1,1,1)$，$B(2,0,0)$，$C(2,-1,-1)$ 三點，試求一單位向量，使其同時垂直 $\overline{AB}$ 與 $\overline{AC}$。

解：$\overline{AB}=(1,-1,-1)$，$\overline{AC}=(1,-2,-2)$，

先求與 $\overline{AB}$，$\overline{AC}$ 同時垂直的向量，

$\overline{AB}\times\overline{AC}=\left(\begin{vmatrix}-1&-1\\-2&-2\end{vmatrix},\begin{vmatrix}-1&1\\-2&1\end{vmatrix},\begin{vmatrix}1&-1\\1&-2\end{vmatrix}\right)=(0,1,-1)$，

設所求向量是 $t(0,1,-1)$，t 為實數，則由 $|t(0,1,-1)|=1$，即 $\sqrt{2t^2}=1$，

解得 $|t|=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，$t=\pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，故所求向量為 $\left(0,\dfrac{\sqrt{2}}{2},-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$ 或 $\left(0,-\dfrac{\sqrt{2}}{2},\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$。

◎4. 試求下列三階行列式的值：

(1) $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 4 & 6 & -8 \\ 3 & -4 & 7 \end{vmatrix}$。　(2) $\begin{vmatrix} 11 & 14 & 17 \\ 12 & 15 & 18 \\ 13 & 16 & 19 \end{vmatrix}$。　(3) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -20 & -15 & -20 \\ 8 & 9 & 16 \end{vmatrix}$。

解：(1)

$\times(-2)$　$\times 1$

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 4 & 6 & -8 \\ 3 & -4 & 7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 10 & -16 \\ 3 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -6 \text{。}$$

(2)

$\times(-1)$　$\times(-1)$

$$\begin{vmatrix} 11 & 14 & 17 \\ 12 & 15 & 18 \\ 13 & 16 & 19 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 11 & 3 & 6 \\ 12 & 3 & 6 \\ 13 & 3 & 6 \end{vmatrix} = 0 \text{。}$$

(3)

$\times(-2)$　$\times(-1)$

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -20 & -15 & -20 \\ 8 & 9 & 16 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 20 & 5 & -20 \\ -24 & -7 & 16 \end{vmatrix} = -20 \text{。}$$

◎5. 設 A（－1，2，1），B（2，－1，2），C（1，2，3），D（0，－1，1）為坐標空間中四點，試求：

(1) 由 $\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{AC}$，$\overrightarrow{AD}$ 三向量所張出的平行六面體體積。

(2) 四面體 $ABCD$ 的體積。

解：$\overrightarrow{AB}=(3,-3,1)$，$\overrightarrow{AC}=(2,0,2)$，$\overrightarrow{AD}=(1,-3,0)$，

(1) $\left|\begin{vmatrix} 3 & -3 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & -3 & 0 \end{vmatrix}\right| = 6$。

(2) $\dfrac{1}{6}\times 6 = 1$。$\left(\text{註：四面體 } ABCD \text{ 的體積，即 } \overrightarrow{AB}，\overrightarrow{AC}，\overrightarrow{AD}，\text{所張出平行六面體體積的 } \dfrac{1}{6}\right)$

二、進階題

6. 空間中，已知$|\vec{a}|=2$，$|\vec{b}|=3$，$\vec{a}\cdot\vec{b}=4$，試求$|\vec{a}\times\vec{b}|$。

解：設 θ 為 $\vec{a}$ 與 $\vec{b}$ 的夾角，

因為 $\cos\theta=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=\dfrac{4}{2\cdot 3}=\dfrac{2}{3}$，所以 $\sin\theta=\sqrt{1-\cos^2\theta}=\dfrac{\sqrt{5}}{3}$，

故$|\vec{a}\times\vec{b}|=|\vec{a}||\vec{b}|\sin\theta=2\cdot 3\cdot\dfrac{\sqrt{5}}{3}=2\sqrt{5}$。

7. 已知空間中的三角形 ABC，以下何者正確？

(A) $\overline{AB}\times\overline{AC}=\overline{AB}\times\overline{CB}$

(B) $\overline{AB}\times\overline{AC}=\overline{AC}\times\overline{BC}$

(C) $|\overline{AB}\times\overline{AC}|=|\overline{AB}\times\overline{CB}|$

(D) $|\overline{AB}\times\overline{AC}|=|\overline{AC}\times\overline{BC}|$

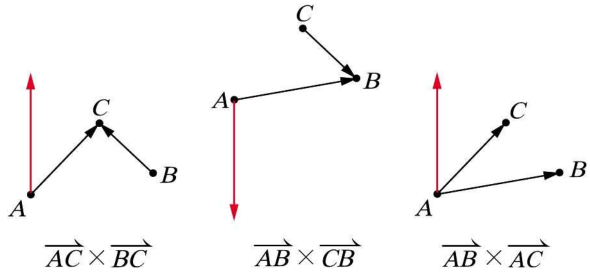
(E) $|\overline{AB}\times\overline{AC}|=\sqrt{|\overline{AB}|^2|\overline{AC}|^2-(\overline{AB}\cdot\overline{AC})^2}$

解：(A)×(C)○：$\overline{AB}\times\overline{AC}$ 與 $\overline{AB}\times\overline{CB}$ 大小相等，方向相反

(B)○(D)○：$\overline{AB}\times\overline{AC}$ 與 $\overline{AC}\times\overline{BC}$ 大小相等，方向相同

(E)○：$|\overline{AB}\times\overline{AC}|$、$\sqrt{|\overline{AB}|^2|\overline{AC}|^2-(\overline{AB}\cdot\overline{AC})^2}$ 均表示由 $\overline{AB}$，$\overline{AC}$ 所張出的平行四邊形面積

故選(B)(C)(D)(E)。



◎8. 關於行列式的性質，下列哪一選項恆成立？

(A) $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & i \end{vmatrix}$　(B) $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} i & h & g \\ f & e & d \\ c & b & a \end{vmatrix}$　(C) $\begin{vmatrix} a & 0 & c \\ d & 0 & f \\ g & 1 & i \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & c \\ d & f \end{vmatrix}$

(D) $\begin{vmatrix} a & 0 & c \\ 0 & e & 0 \\ g & 0 & i \end{vmatrix} = 0$　(E) $\begin{vmatrix} 0 & b & c \\ d & 0 & f \\ g & h & 0 \end{vmatrix} = 0$

解：(A)　○：行列互換行列式值不變，故$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & i \end{vmatrix}$

(B)　○：$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} g & h & i \\ d & e & f \\ a & b & c \end{vmatrix} = (-1)^2\begin{vmatrix} i & h & g \\ f & e & d \\ c & b & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} i & h & g \\ f & e & d \\ c & b & a \end{vmatrix}$

(C)　×：$\begin{vmatrix} a & 0 & c \\ d & 0 & f \\ g & 1 & i \end{vmatrix} = -0\times\begin{vmatrix} d & f \\ g & i \end{vmatrix} + 0\times\begin{vmatrix} a & c \\ g & i \end{vmatrix} - 1\times\begin{vmatrix} a & c \\ d & f \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a & c \\ d & f \end{vmatrix}$

(D)　×：$\begin{vmatrix} a & 0 & c \\ 0 & e & 0 \\ g & 0 & i \end{vmatrix} = e\begin{vmatrix} a & c \\ g & i \end{vmatrix}$

(E)　×：反例：$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} \neq 0$

故選(A)(B)。

三、挑戰題

9. 試求一向量 $\vec{n}=(a,b,c)$，滿足 $a+3b+5c=0$，$2a+4b+7c=0$ 及 $|\vec{n}|=2\sqrt{14}$ 。

解：$(a,b,c)\cdot(1,3,5)=0$，$(a,b,c)\cdot(2,4,7)=0$，

故 $\vec{n}\perp(1,3,5)$，$\vec{n}\perp(2,4,7)$。

$$(1,3,5)\times(2,4,7)=\left(\begin{vmatrix}3&5\\4&7\end{vmatrix},\begin{vmatrix}5&1\\7&2\end{vmatrix},\begin{vmatrix}1&3\\2&4\end{vmatrix}\right)=(1,3,-2),$$

所以 $\vec{n}\,//\,(1,3,-2)$，令 $\vec{n}=t(1,3,-2)$ 且 $|\vec{n}|=2\sqrt{14}$，

得 $t=\pm2$，故 $\vec{n}=(2,6,-4)$ 或 $(-2,-6,4)$。