4-3　雙曲線

重點一　雙曲線的定義

例題 1

下列方程式的圖形，何者為雙曲線？（8 分）

(A) $\left|\sqrt{(x-1)^2+(y-1)^2}-\sqrt{x^2+(y+1)^2}\right|=3$

(B) $\left|\sqrt{(x-1)^2+(y-1)^2}-\sqrt{x^2+(y+1)^2}\right|=\sqrt{5}$

(C) $\left|\sqrt{(x-1)^2+(y-1)^2}-\sqrt{x^2+(y+1)^2}\right|=2$

(D) $\left|\sqrt{(x-1)^2+(y-1)^2}+\sqrt{x^2+(y+1)^2}\right|=6$

解：令 $P(x,y)$，$F_1(1,1)$，$F_2(0,-1)$，$\overline{F_1F_2}=\sqrt{5}$

(A)×：$\left|\overline{PF_1}-\overline{PF_2}\right|=3=2a$，$\overline{F_1F_2}<2a$，沒有圖形

(B)×：$\left|\overline{PF_1}-\overline{PF_2}\right|=\sqrt{5}=2a$，$\overline{F_1F_2}=2a$，兩射線

(C)○：$\left|\overline{PF_1}-\overline{PF_2}\right|=2=2a$，$\overline{F_1F_2}>2a$，雙曲線

(D)×：$\left|\overline{PF_1}+\overline{PF_2}\right|=6=2a$，$\overline{F_1F_2}<2a$，橢圓

故選(C)

重點二　雙曲線的標準式

例題 2

已知一雙曲線的兩焦點為 $(5,0)$，$(-5,0)$，貫軸長為 8，試求此雙曲線的方程式。（7 分）

解：因為焦點為 $(5,0)$，$(-5,0)$

所以中心為原點，貫軸在 x 軸上

且方程式形如 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$

又 $c=5$，貫軸長 $2a=8 \Rightarrow a=4$

而 $b^2=c^2-a^2=5^2-4^2=9$

得雙曲線方程式為 $\dfrac{x^2}{16}-\dfrac{y^2}{9}=1$

例題 3

試求雙曲線 $3x^2-4y^2=12$ 上任一點至兩條漸近線之距離乘積。（8 分）

解：$3x^2-4y^2=12 \Rightarrow \dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{3}=1 \Rightarrow a^2=4$，$b^2=3$

所求為 $\dfrac{a^2b^2}{a^2+b^2}=\dfrac{4\times3}{4+3}=\dfrac{12}{7}$

例題 4

一雙曲線之兩漸近線為 $2x+y-1=0$ 與 $2x-y-3=0$，且過（1 , 1），則此雙曲線的方程式為______。（7 分）

解：設雙曲線方程式為 $(2x+y-1)(2x-y-3)=k$

過（1 , 1）⇨ $(2\times1+1-1)(2\times1-1-3)=k$　$\therefore k=-4$

得 $(2x+y-1)(2x-y-3)=-4$

⇨ $4x^2-y^2-8x-2y+3=-4$ ⇨ $\dfrac{(y+1)^2}{4}-\dfrac{(x-1)^2}{1}=1$

例題 5

已知雙曲線 $\dfrac{x^2}{25}-\dfrac{y^2}{16}=1$，試求：

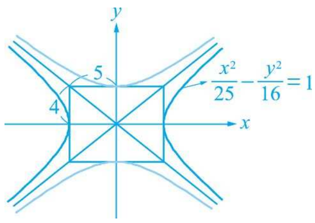
(1) 其兩條漸近線方程式。（6 分）　　(2) 共軛雙曲線。（6 分）

解：(1) 因為 $a=5$，$b=4$

所以長方形中的兩對角線斜率分別為 $\dfrac{4}{5}$ 與 $-\dfrac{4}{5}$

且過中心原點 O

因此兩漸近線方程式為 $y=\dfrac{4}{5}x$ 與 $y=-\dfrac{4}{5}x$



(2) $\dfrac{x^2}{25}-\dfrac{y^2}{16}=1$ 的共軛雙曲線為 $\dfrac{x^2}{25}-\dfrac{y^2}{16}=-1$，

即 $\dfrac{y^2}{16}-\dfrac{x^2}{25}=1$

例題 6

一雙曲線的方程式為 Γ：$9x^2-4y^2-18x+16y-43=0$，試求：

(1) 其兩條漸近線方程式。（6 分）

(2) 共軛雙曲線。（6 分）

解：(1) $9x^2-4y^2-18x+16y-43=0$

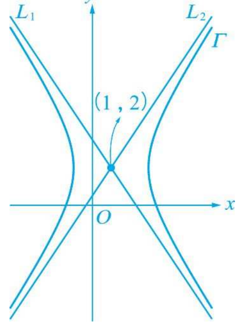
⇨ $9(x^2-2x+1)-4(y^2-4y+4)=36$

⇨ $\dfrac{(x-1)^2}{4}-\dfrac{(y-2)^2}{9}=1$

漸近線方程式為 $\dfrac{(x-1)^2}{4}-\dfrac{(y-2)^2}{9}=0$

⇨ $\dfrac{x-1}{2}+\dfrac{y-2}{3}=0$ 與 $\dfrac{x-1}{2}-\dfrac{y-2}{3}=0$

⇨ $3x+2y-7=0$ 與 $3x-2y+1=0$



(2) 共軛雙曲線為 $\dfrac{(x-1)^2}{4}-\dfrac{(y-2)^2}{9}=-1$

例題 7

已知雙曲線 Γ 與 $\dfrac{y^2}{16}-\dfrac{x^2}{9}=1$ 有共同焦點，且其貫軸長為 6，試求雙曲線 Γ 的方程式。（10 分）

解： 已知 $\dfrac{y^2}{16}-\dfrac{x^2}{9}=1$ 的中心為（0 , 0），貫軸在 y 軸上

且 $a^2=16$，$b^2=9$　$\therefore c^2=16+9=25$

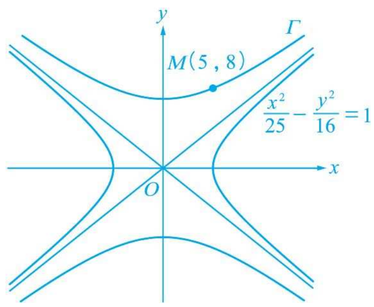
其共焦點的雙曲線亦為上下型，且貫軸長 $2a'=6$ ⇨ $a'=3$

可假設雙曲線 Γ：$\dfrac{y^2}{3^2}-\dfrac{x^2}{b'^2}=1$，利用 $3^2+b'^2=25$ ⇨ $b'^2=16$

故雙曲線 Γ：$\dfrac{y^2}{9}-\dfrac{x^2}{16}=1$

例題 8

試求經過點 M（5 , 8）且與雙曲線 $\dfrac{x^2}{25}-\dfrac{y^2}{16}=1$ 有共同漸近線的雙曲線方程式。（10 分）



解： 與 $\dfrac{x^2}{25}-\dfrac{y^2}{16}=1$ 有共同漸近線的雙曲線

可假設雙曲線為 Γ：$\dfrac{x^2}{25}-\dfrac{y^2}{16}=k$

已知 M（5 , 8）$\in \Gamma$

$\dfrac{5^2}{25}-\dfrac{8^2}{16}=k$　⇨ $k=-3$

故雙曲線方程式 Γ：$\dfrac{x^2}{25}-\dfrac{y^2}{16}=-3$　⇨ $\dfrac{y^2}{48}-\dfrac{x^2}{75}=1$

重點三　雙曲線的平移與伸縮

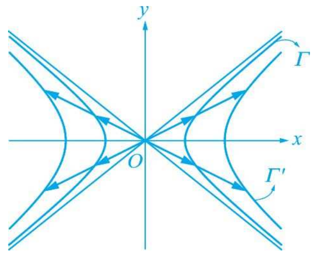
例題 9

若將雙曲線 Γ：$\dfrac{x^2}{25}-\dfrac{y^2}{16}=1$ 以原點為中心伸縮 2 倍，得到一個新雙曲線 Γ'的圖形，試求：

(1) 雙曲線 Γ'的方程式。（6 分）

(2) Γ'的漸近線方程式。（6 分）

解：(1) 將雙曲線 Γ：$\dfrac{x^2}{25}-\dfrac{y^2}{16}=1$ 以原點為中心伸縮 2 倍



可得雙曲線 Γ'：$\dfrac{x^2}{(5\times2)^2}-\dfrac{y^2}{(4\times2)^2}=1$

故雙曲線 Γ'：$\dfrac{x^2}{100}-\dfrac{y^2}{64}=1$

(2) 設雙曲線 Γ'的漸近線方程式為 $\dfrac{x^2}{100}-\dfrac{y^2}{64}=0$

則兩條漸近線為 $4x+5y=0$ 與 $4x-5y=0$

$\left(\text{與原雙曲線}\dfrac{x^2}{25}-\dfrac{y^2}{16}=1\text{的漸近線相同}\right)$

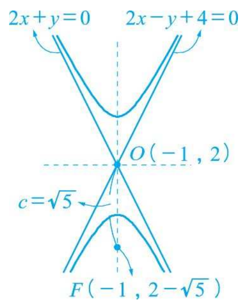
例題 10

某一雙曲線以 $2x+y=0$，$2x-y+4=0$ 為漸近線，且以（-1 , $2-\sqrt{5}$）為一焦點。試求：

(1) 貫軸所在的直線方程式。（7 分）

(2) 雙曲線方程式。（7 分）

解：(1) 已知 $\begin{cases}2x+y=0\\2x-y+4=0\end{cases}$ 為其漸近線，其交點即為中心



聯立解得中心為（-1 , 2）

中心（-1 , 2）與焦點（-1 , $2-\sqrt{5}$）皆在貫軸上

此雙曲線為直立型，故貫軸為 $x+1=0$

(2) 雙曲線 Γ可設為 $(2x+y)(2x-y+4)=k$

⇨ $4(x+1)^2-(y-2)^2=k$

$\therefore\Gamma$：$\dfrac{(y-2)^2}{|k|}-\dfrac{(x+1)^2}{\frac{|k|}{4}}=1$

又 $\overline{OF}=\sqrt{5}$，利用 $a^2+b^2=c^2$ ⇨ $|k|+\dfrac{|k|}{4}=5$　$\therefore |k|=4$

雙曲線方程式為 $\dfrac{(y-2)^2}{4}-\dfrac{(x+1)^2}{1}=1$