

4-2 橢圓

重點一 橢圓的定義

例題 1

試求橢圓 $\sqrt{(x+1)^2 + (y-1)^2} + \sqrt{(x-5)^2 + (y-1)^2} = 10$ 的焦點坐標、中心坐標、長軸長、頂點坐標、長軸方程式。(15分)

解：(1) 焦點坐標為 $F_1(-1, 1), F_2(5, 1)$

(2) 中心坐標為 $\left(\frac{-1+5}{2}, \frac{1+1}{2}\right) = (2, 1)$

(3) 長軸長為 $2a = 10$

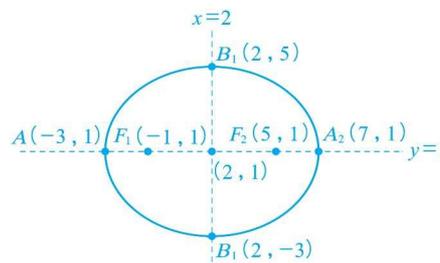
(4) $2a = 10 \Rightarrow a = 5$, 又 $c = 3$

$\therefore b = \sqrt{5^2 - 3^2} = 4$

頂點坐標為 $A_1 = (2-5, 1) = (-3, 1), A_2 = (2+5, 1) = (7, 1)$

$B_1 = (2, 1+4) = (2, 5), B_2 = (2, 1-4) = (2, -3)$

(5) 長軸方程式為 $y = 1$



重點二 橢圓的標準式

例題 2

完成下列表格：(16分)

橢圓方程式	中心	焦點	對稱軸長	兩焦點間距離
(1) $4x^2 + 36y^2 = 36$	$(0, 0)$	$(2\sqrt{2}, 0), (-2\sqrt{2}, 0)$	長軸長 6 短軸長 2	$4\sqrt{2}$
(2) $\frac{(x+3)^2}{9} + \frac{(y-2)^2}{1} = 1$	$(-3, 2)$	$(-3+2\sqrt{2}, 2), (-3-2\sqrt{2}, 2)$	長軸長 6 短軸長 2	$4\sqrt{2}$

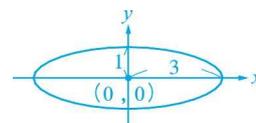
解：(1) $4x^2 + 36y^2 = 36 \Rightarrow \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{1} = 1$, 中心為 $(0, 0)$, 如圖(一)

$a = 3, b = 1, c = \sqrt{3^2 - 1^2} = 2\sqrt{2}$

\therefore 長軸長 $2a = 6$, 短軸長 $2b = 2$

焦點為 $(2\sqrt{2}, 0), (-2\sqrt{2}, 0)$

兩焦點間距離為 $2c = 4\sqrt{2}$



圖(一)

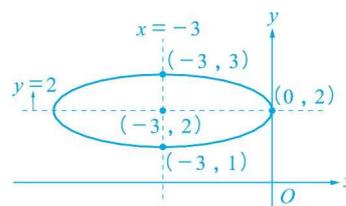
(2) $\frac{(x+3)^2}{9} + \frac{(y-2)^2}{1} = 1$, 中心為 $(-3, 2)$, 如圖(二)

$a = 3, b = 1, c = \sqrt{3^2 - 1^2} = 2\sqrt{2}$

\therefore 長軸長 $2a = 6$, 短軸長 $2b = 2$

焦點為 $(-3+2\sqrt{2}, 2), (-3-2\sqrt{2}, 2)$

兩焦點間距離 $2c = 4\sqrt{2}$



圖(二)

重點三 橢圓的平移與伸縮

例題 3

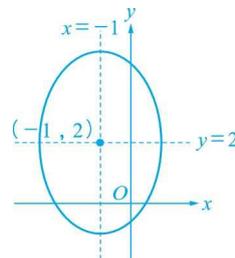
一橢圓的長軸在 $x+1=0$ 上，短軸在 $y-2=0$ 上，若長軸長為 6，短軸長為 4，試求此橢圓方程式。(8 分)

解：長軸在 $x+1=0$ 上，短軸在 $y-2=0$ 上

則中心為 $(-1, 2)$

又 $2a=6, 2b=4 \Rightarrow a=3, b=2$

故橢圓方程式為 $\frac{(x+1)^2}{4} + \frac{(y-2)^2}{9} = 1$



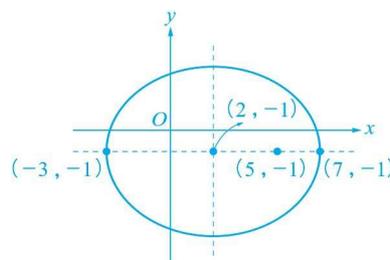
例題 4

一橢圓的頂點為 $(7, -1), (-3, -1)$ ，一焦點為 $(5, -1)$ ，試求此橢圓方程式。(8 分)

解：中心為 $\left(\frac{7+(-3)}{2}, \frac{-1+(-1)}{2}\right) = (2, -1)$

$a=5, c=3, b = \sqrt{5^2 - 3^2} = 4$

\therefore 橢圓方程式為 $\frac{(x-2)^2}{25} + \frac{(y+1)^2}{16} = 1$



例題 5

一橢圓的兩焦點為 $(1, 5), (1, -1)$ ，長軸長為 10，試求此橢圓方程式。(8 分)

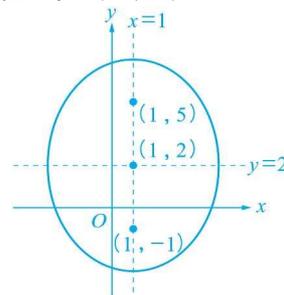
解： \because 兩焦點為 $(1, 5), (1, -1)$

\therefore 中心為 $(1, 2)$

且長軸平行 y 軸， $2c=6 \Rightarrow c=3$

又長軸長 $2a=10 \Rightarrow a=5$ ，而 $b = \sqrt{5^2 - 3^2} = 4$

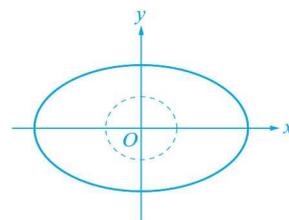
故橢圓方程式為 $\frac{(x-1)^2}{16} + \frac{(y-2)^2}{25} = 1$



例題 6

已知將橢圓 $\frac{x^2}{5} + \frac{y^2}{4} = 1$ 的圖形以原點為中心，沿 x 軸伸縮 3 倍，沿 y 軸伸縮 2 倍，試求所得的圖形方程式。(8 分)

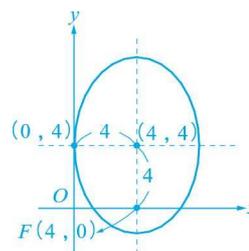
解：依題意將橢圓 $\frac{x^2}{5} + \frac{y^2}{4} = 1$ ，
以原點為中心，沿 x 軸伸縮 3 倍，沿 y 軸伸縮 2 倍
可得 $\frac{x^2}{(\sqrt{5} \times 3)^2} + \frac{y^2}{(2 \times 2)^2} = 1$ ，
即 $\frac{x^2}{45} + \frac{y^2}{16} = 1$



例題 7

坐標平面上有一橢圓，已知其長軸平行 y 軸，短軸的一個頂點為 $(0, 4)$ ，且其中一個焦點為 $(4, 0)$ ，則此橢圓長軸長為_____。(9 分)

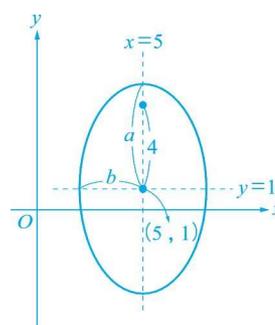
解：∵長軸平行 y 軸，且焦點落在長軸上
∴可設長軸方程式為 $x=4$
又知短軸的頂點為 $(0, 4)$
可設短軸方程式為 $y=4$
可得中心為 $(4, 4)$
⇒ $b=4, c=4, a = \sqrt{4^2 + 4^2} = 4\sqrt{2}$
故橢圓長軸長 $2a = 8\sqrt{2}$



例題 8

一橢圓的長軸在 $x=5$ 上，短軸在 $y=1$ 上，短軸長為長軸長的 $\frac{3}{5}$ 倍，中心到焦點的距離為 4，則此橢圓的方程式為_____。(9 分)

解：長軸在 $x=5$ ，短軸在 $y=1$ ，橢圓為直立型
中心為 $(5, 1)$ ， $c=4, b = \frac{3}{5}a$
利用 $a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow a^2 = \left(\frac{3}{5}a\right)^2 + 4^2$
⇒ $\frac{16}{25}a^2 = 16 \Rightarrow a^2 = 25, b^2 = \left(\frac{3}{5}a\right)^2 = 9$
故橢圓方程式為 $\frac{(x-5)^2}{9} + \frac{(y-1)^2}{25} = 1$



例題 9

試描述方程式 $3x^2 + 2y^2 + 6x - 4y - 1 = 0$ 的圖形。(10分)

解： $3x^2 + 2y^2 + 6x - 4y - 1 = 0$

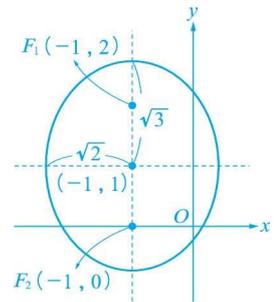
$$\Rightarrow 3(x^2 + 2x + 1) + 2(y^2 - 2y + 1) = 6$$

$$\Rightarrow 3(x+1)^2 + 2(y-1)^2 = 6$$

$$\Rightarrow \frac{(x+1)^2}{2} + \frac{(y-1)^2}{3} = 1$$

所以方程式是一個橢圓，中心為 $(-1, 1)$ ，

長軸長為 $2\sqrt{3}$ ，短軸長為 $2\sqrt{2}$ ，兩焦點為 $(-1, 2)$ ， $(-1, 0)$



例題 10

若線段 AB 長為 5，點 P 在 \overline{AB} 上， $\overline{PA} : \overline{PB} = 2 : 3$ ，且 A 點在 x 軸上移動， B 點在 y 軸上移動，試求所有 P 點所形成的圖形方程式。(9分)

解：設點 $A(a, 0)$ ， $B(0, b)$ ， $P(x, y)$

由分點公式得 $P\left(\frac{3a}{2+3}, \frac{2b}{2+3}\right)$ ，

則 $x = \frac{3a}{5}$ ， $y = \frac{2b}{5}$

再由 $a^2 + b^2 = 5^2$ 得 $\left(\frac{5}{3}x\right)^2 + \left(\frac{5}{2}y\right)^2 = 25$ ，

即 $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$

