第 4 章　二次曲線

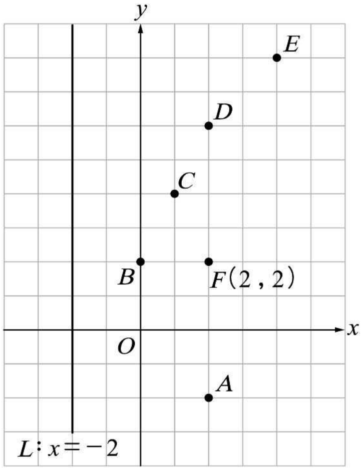
4-1　拋物線

重點一　拋物線的定義

例題 1

右圖中，拋物線 Γ 以 $F(2,2)$ 為焦點，L：$x=-2$ 為準線，若 A，B，C，D，E 為方格紙上的格子點，試問拋物線 Γ 會經過下列哪些點？（6 分）

(A)A　(B)B　(C)C　(D)D　(E)E



解： 假設 P 為 Γ 上任一點，F 為拋物線之焦點

利用拋物線的定義，即 $\overline{PF}=d(P,L)$

故選(A)(B)(D)

重點二　拋物線的標準式

例題 2

頂點為 $(0,0)$，焦點為 $(0,2)$ 之拋物線方程式為________。（6 分）

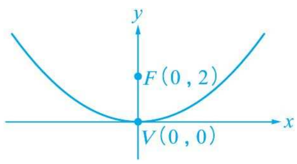
解： 頂點為 $V(0,0)$，焦點為 $F(0,2)$，則 $\overline{VF}=|c|=2$

對稱軸為 $x=0$

如右圖，開口向上　$\therefore c=2$

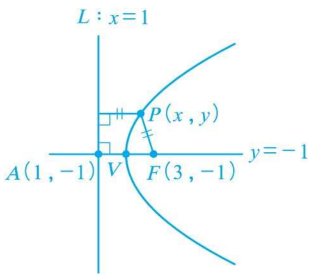
利用拋物線的標準式 $(x-h)^2=4c(y-k)$

故拋物線方程式為 $x^2=8y$



例題 3

設拋物線的焦點為 $F(3,-1)$，準線為 L：$x=1$，試求對稱軸方程式、頂點坐標、拋物線方程式。（12 分）



解： (1) 對稱軸通過焦點 $F(3,-1)$

且垂直準線 $x=1$

對稱軸方程式為 $y=-1$

(2) 頂點 V 為 A 與 F 之中點

$$\therefore V\left(\frac{1+3}{2},\frac{-1+(-1)}{2}\right)=(2,-1)$$

(3) 此拋物線開口向右

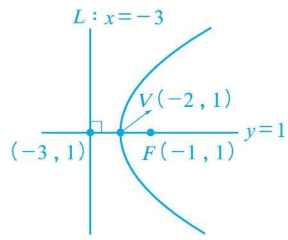
頂點 $V(2,-1)$，$c=3-2=1$

利用拋物線的標準式 $(y-k)^2=4c(x-h)$

故拋物線方程式為 $(y+1)^2=4(x-2)$

例題 4

已知拋物線方程式為 $y^2=2y+4x+7$，試求頂點坐標、焦點坐標、準線方程式、對稱軸方程式。（12 分）



解：$y^2=2y+4x+7$

⇨ $(y-1)^2=4x+8=4(x+2)=4\times1(x+2)$

此拋物線開口向右，且 $c=1$

∴頂點坐標為 $V(-2,1)$

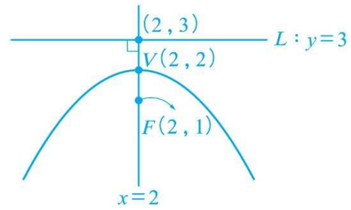
焦點坐標為 $F(-2+1,1)=(-1,1)$

準線方程式為 $L：x=-3$

對稱軸方程式為 $y=1$

例題 5

已知拋物線方程式為 $x^2-4x+4y-4=0$，試求頂點坐標、焦點坐標、準線方程式、對稱軸方程式。（12 分）



解：$x^2-4x+4y-4=0$

⇨ $(x-2)^2=-4(y-2)$

此拋物線開口向下，且 $c=-1$

∴頂點坐標為 $V(2,2)$

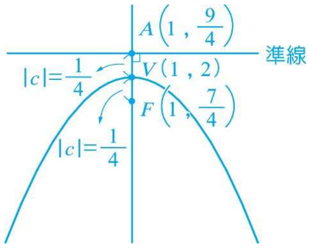
焦點坐標為 $F(2,2-1)=(2,1)$

準線方程式為 $L：y=3$

對稱軸方程式為 $x=2$

例題 6

一拋物線的對稱軸垂直於 x 軸，並通過（0 , 1），（1 , 2），（3 , −2）三點，試求拋物線方程式、焦點坐標、準線方程式。（12 分）



解：(1) 已知拋物線的對稱軸垂直於 x 軸

可設拋物線方程式為 $y=ax^2+bx+c$

又過（0 , 1），（1 , 2），（3 , −2），代入方程式得

$$\begin{cases}1=c\\2=a+b+c\\-2=9a+3b+c\end{cases}$$

⇨ $a=-1$，$b=2$，$c=1$

故拋物線方程式為 $y=-x^2+2x+1$

(2) $\because y=-x^2+2x+1$ ⇨ $(x-1)^2=-(y-2)$

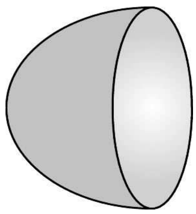
⇨ $(x-1)^2=4\times\left(-\dfrac{1}{4}\right)(y-2)$

頂點（1 , 2），開口向下，$|c|=\dfrac{1}{4}$

$\therefore$焦點 $F\left(1,2-\dfrac{1}{4}\right)=\left(1,\dfrac{7}{4}\right)$

(3) 準線方程式為 $y=\dfrac{9}{4}$

例題 7



如右圖，汽車前燈的外形是拋物線繞軸旋轉而成的拋物面，它的縱截面之輪廓是拋物線的一部分，若燈口的直徑為 8 公分，燈深 4 公分，試求焦點與頂點的距離。（10 分）

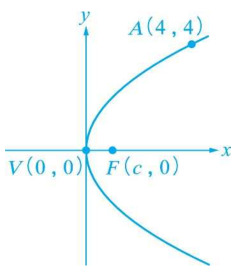
解：汽車前燈的縱截面為拋物線，如右圖

令頂點 $V(0,0)$，焦點為 $F(c,0)$

燈口 A 點（4 , 4）代入拋物線 $y^2=4cx$ 中

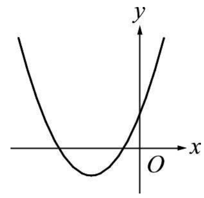
得 $16=4c\times4$ ⇨ $c=1$

故焦點與頂點的距離為 1 公分



例題 8

設 $y=ax^2+bx+c$ 之圖形如右，下列何者正確？（10 分）



(A)$a<0$
(B)$b<0$
(C)$c>0$
(D)$a+b+c>0$
(E)$b^2-4ac>0$

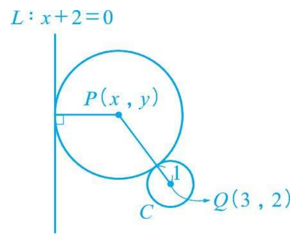
解：$y=ax^2+bx+c \Rightarrow y=a\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2+\dfrac{4ac-b^2}{4a}$

(A)×：∵開口朝上　∴$a>0$
(B)×：對稱軸 $x=-\dfrac{b}{2a}<0 \Rightarrow b>0$
(C)◯：∵y 之截距為正　∴$c>0$
(D)◯：令 $x=1$　∴$a+b+c>0$
(E)◯：與 x 軸交於兩點　∴$b^2-4ac>0$
故選(C)(D)(E)

例題 9

已知直線 $L：x+2=0$，圓 $C：x^2+y^2-6x-4y+12=0$，試求與 L 相切且與圓 C 外切之切圓圓心軌跡方程式為________。（10 分）

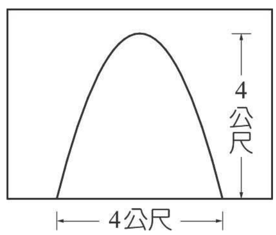
解：$C：(x-3)^2+(y-2)^2=1$



設所求圓心 $P(x, y)$
$\overline{PQ}=d(P, L)+1$
$\sqrt{(x-3)^2+(y-2)^2}=(x+2)+1$
$\Rightarrow (x-3)^2+(y-2)^2=(x+3)^2$
故軌跡方程式為 $(y-2)^2=12x$

例題 10

有一拋物線形隧道口，最底部寬為 4 公尺，頂部高為 4 公尺，最高點為原點，以公尺為單位，試求隧道口所形成的拋物線方程式。（10 分）



解：將拋物線的隧道口坐標化，置最高頂點於原點位置，
則拋物線方程式為 $x^2=4cy$，其中 $c<0$
∵通過 $(2, -4)$
∴$2^2=4c\times(-4)$，得 $4c=-1$
即拋物線方程式為 $x^2=-y$