# 3-3　矩陣的應用

## 重點一　轉移矩陣

**例題 1**

下列何者是轉移矩陣？（10 分）

(A)$\begin{bmatrix} 0.5 & 0.3 \\ 0.6 & 0.4 \end{bmatrix}$　(B)$\begin{bmatrix} \sqrt{2}-2 & 3-\sqrt{5} \\ 3-\sqrt{2} & \sqrt{5} \end{bmatrix}$　(C)$\begin{bmatrix} 0.2 & 0.4 \\ 0.8 & 0.6 \end{bmatrix}$

(D)$\begin{bmatrix} \frac{1}{4} & \frac{2}{5} \\ \frac{3}{4} & \frac{3}{5} \end{bmatrix}$　(E)$\begin{bmatrix} 0.3 & 0.4 & 0.9 \\ 0.7 & 0.6 & 0.1 \end{bmatrix}$

**解：**轉移矩陣必為方陣，且需滿足：

(1) 每一個元皆大於或等於 0

(2) 每一行的所有元之和為 1

故選(C)(D)

**例題 2**

某生物老師做了如下的實驗：於前次的實驗，跳向右邊的青蛙中，有 60％的青蛙下次實驗中仍跳向右邊；而跳向左邊的青蛙中，有 40％的青蛙在下次實驗跳向右邊，試求：

(1) 轉移矩陣 $A$＝______。（4 分）

(2) 如果在第一次的實驗中有 40％的青蛙跳向右邊，第二次有______％的青蛙跳向右邊。（6 分）

**解：**(1) 轉移矩陣 $A=\begin{array}{cc} \text{右}\quad\text{左} & \\ \begin{bmatrix} 0.6 & 0.4 \\ 0.4 & 0.6 \end{bmatrix} & \begin{array}{l} \text{右} \\ \text{左} \end{array} \end{array}$

(2) $\begin{bmatrix} 0.6 & 0.4 \\ 0.4 & 0.6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0.4 \\ 0.6 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0.48 \\ 0.52 \end{bmatrix}$

∴第二次有 48％的青蛙跳向右邊

**例題 3**

曉明的運動習慣：當他今天打球後，則明天打球的機率為 0.8；當今天不打球後，明天打球的機率為 0.6。試問：

(1) 若第 1 天不打球，則第 3 天打球的機率為______。（5 分）

(2) 長期而言，曉明打球的機率為______。（5 分）

**解：**(1) 若 $S_1$ 表打球，$S_2$ 表不打球，$a_{ij}$ 表由 $S_j$ 轉變成 $S_i$ 的機率，則 $\begin{array}{cc} S_1 & S_2 \\ \begin{bmatrix} 0.8 & 0.6 \\ 0.2 & 0.4 \end{bmatrix} \end{array}\begin{array}{c} S_1 \\ S_2 \end{array}$

$X_2=\begin{bmatrix} 0.8 & 0.6 \\ 0.2 & 0.4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0.6 \\ 0.4 \end{bmatrix}$，$X_3=\begin{bmatrix} 0.8 & 0.6 \\ 0.2 & 0.4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0.6 \\ 0.4 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0.72 \\ 0.28 \end{bmatrix}$

故第 3 天打球的機率為 0.72

(2) 令穩定狀態矩陣 $X=\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$，則 $AX=X$

$\begin{bmatrix} 0.8 & 0.6 \\ 0.2 & 0.4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 0.8a+0.6b=a \\ 0.2a+0.4b=b \end{cases} \Rightarrow a=3b \Rightarrow a:b=3:1$

又 $a+b=1$　$\therefore a=\dfrac{3}{4}$

故長期而言，曉明打球的機率為 $\dfrac{3}{4}$

**重點二　二階方陣的乘法反方陣**

**例題 4**

若 $A=\begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$，則 $A^{-1}=$______。（10 分）

**解：**$\because \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}=6-5=1$

$\therefore A^{-1}=\dfrac{1}{1}\begin{bmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$

**例題 5**

若 $A=\begin{bmatrix}1&2\\3&5\end{bmatrix}$，$B=\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}$，滿足 $AB=\begin{bmatrix}2&0\\0&2\end{bmatrix}$，則 $a^2+b^2+c^2+d^2=$______。（10 分）

**解**：$\because AB=\begin{bmatrix}2&0\\0&2\end{bmatrix}=2\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}=2I_2$

⇨ $B=A^{-1}2I_2=\begin{bmatrix}-5&2\\3&-1\end{bmatrix}\times 2\times\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}=2\times\begin{bmatrix}-5&2\\3&-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-10&4\\6&-2\end{bmatrix}$

⇨ $a^2+b^2+c^2+d^2=100+16+36+4=156$

**例題 6**

設 $A=\begin{bmatrix}x-2&0\\1&3-x\end{bmatrix}$的乘法反方陣不存在，則 $x=$______。（10 分）

**解**：$A$ 的乘法反方陣不存在，則 $\det A=0$

$\begin{vmatrix}x-2&0\\1&3-x\end{vmatrix}=0$

⇨ $(x-2)(3-x)-0=0$

⇨ $(x-2)(x-3)=0$

⇨ $x=2$ 或 $3$

**例題 7**

(1) 試將 $\begin{cases}2x-y=3\\3x-2y=4\end{cases}$ 寫成 $AX=B$ 的形式。（4 分）

(2) 根據(1)，試求矩陣 $X$。（6 分）

**解**：(1) 原方程組可寫成

$\begin{bmatrix}2&-1\\3&-2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3\\4\end{bmatrix}$

令 $A=\begin{bmatrix}2&-1\\3&-2\end{bmatrix}$，$X=\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}$，$B=\begin{bmatrix}3\\4\end{bmatrix}$即為所求

(2) 因 $\det A=-1\neq 0$，故 $A^{-1}$ 存在

計算可得 $A^{-1}=\dfrac{1}{-1}\begin{bmatrix}-2&1\\-3&2\end{bmatrix}$

故 $X=A^{-1}B=\dfrac{1}{-1}\begin{bmatrix}-2&1\\-3&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3\\4\end{bmatrix}=\dfrac{1}{-1}\begin{bmatrix}-2\\-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}$

**例題 8**

已知 $A=\begin{bmatrix}3&4\\5&7\end{bmatrix}$，試求 $B$，使得 $AB=I_2$。（10 分）

**解：** 設 $B=\begin{bmatrix}x&u\\y&v\end{bmatrix}$，則 $AB=I_2$，即 $\begin{bmatrix}3&4\\5&7\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x&u\\y&v\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}$

整理得 $\begin{bmatrix}3x+4y&3u+4v\\5x+7y&5u+7v\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}$

比較各元可得方程組 $\begin{cases}3x+4y=1\\5x+7y=0\end{cases}$ 與 $\begin{cases}3u+4v=0\\5u+7v=1\end{cases}$

解得方程組 $x=7$，$y=-5$，$u=-4$，$v=3$

故 $B=\begin{bmatrix}7&-4\\-5&3\end{bmatrix}$

**例題 9**

若 $A^{-1}=\begin{bmatrix}4&3\\2&1\end{bmatrix}$，$B^{-1}=\begin{bmatrix}1&1\\-1&1\end{bmatrix}$，則（$AB$）$^{-1}=$______。（10 分）

**解：** 設 $X$ 是 $AB$ 的乘法反方陣

$X(AB)=I_2 \Rightarrow X(AB)B^{-1}=I_2B^{-1} \Rightarrow XAI_2=I_2B^{-1} \Rightarrow XAA^{-1}=B^{-1}A^{-1} \Rightarrow X=B^{-1}A^{-1}$

$\therefore (AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$

所求 $(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}=\begin{bmatrix}1&1\\-1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}4&3\\2&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}6&4\\-2&-2\end{bmatrix}$

**例題 10**

設 $A=\begin{bmatrix}2&4\\5&6\end{bmatrix}$，$I_2=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}$，試求：

(1) $A^2-8A-8I_2=$______。（5 分）

(2) 若 $A^{-1}=aA+bI_2$，試求 $a$，$b$ 之值。（5 分）

**解：** (1) $A^2=\begin{bmatrix}2&4\\5&6\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&4\\5&6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}24&32\\40&56\end{bmatrix}$

$\therefore A^2-8A-8I_2=\begin{bmatrix}24&32\\40&56\end{bmatrix}-8\begin{bmatrix}2&4\\5&6\end{bmatrix}-8\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}$

$=\begin{bmatrix}24&32\\40&56\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}16&32\\40&48\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}8&0\\0&8\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix}$

(2) $\because A^2-8A-8I_2=O_2 \Rightarrow 8I_2=A^2-8A=A(A-8I_2)$

$\Rightarrow I_2=A\left(\dfrac{A}{8}-I_2\right) \Rightarrow A^{-1}I_2=A^{-1}A\left(\dfrac{A}{8}-I_2\right)$

$\Rightarrow A^{-1}=\dfrac{1}{8}A-I_2$

$\therefore a=\dfrac{1}{8}$，$b=-1$