2-3　三元一次聯立方程式

重點一　消去法

例題 1

設二次函數 $f(x)=ax^2+bx+c$ 的圖形通過 $(1,1)$，$(2,2)$，$(3,5)$ 三點，試求 $f(x)$。（6 分）

解： 將 $(1,1)$，$(2,2)$，$(3,5)$ 代入二次函數 $f(x)$

得到一個三元一次聯立方程式

$$\begin{cases} a+b+c=1 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots① \\ 4a+2b+c=2 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots② \\ 9a+3b+c=5 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots③ \end{cases}$$

使用加減消去法，將②－①及③－①消去 c 得

$$\begin{cases} 3a+b=1 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots④ \\ 8a+2b=4 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots⑤ \end{cases}$$

由⑤－④×2 得 $2a=2$ ⇨ $a=1$，代入④得 $b=-2$，再代入①得 $c=2$

因此 $f(x)=x^2-2x+2$

例題 2

試解下列各方程組：

(1) $\begin{cases} x+4y+2z=1 \\ 3x-z=-2 \\ -2x+4y+3z=3 \end{cases}$。（6 分）　　(2) $\begin{cases} x+y+z=6 \\ x-2y+z=4 \\ 3x-6y+3z=17 \end{cases}$。（6 分）

解： (1) $\begin{cases} x+4y+2z=1 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots① \\ 3x-z=-2 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots② \\ -2x+4y+3z=3 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots③ \end{cases}$

①－③得 $3x-z=-2$，此式與②式相同

故此方程組有無限多組解

令 $x=4t$，則 $z=2+12t$，再代回①得 $y=-\dfrac{3}{4}-7t$

故方程組的解為 $\begin{cases} x=4t \\ y=-\dfrac{3}{4}-7t \\ z=2+12t \end{cases}$，$t$ 為實數

(2) $\begin{cases} x+y+z=6 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots① \\ x-2y+z=4 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots② \\ 3x-6y+3z=17 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots③ \end{cases}$

①－②得 $y=\dfrac{2}{3}$ 代入①、③得 $\begin{cases} x+z=\dfrac{16}{3} \text{L L L L L L} ④ \\ 3x+3z=21 \text{ L L L L L} ⑤ \end{cases}$

④×3－⑤得 $0=-5$，因此，方程組無解

◎重點二　三元一次方程組的克拉瑪公式

例題 3（三元一次方程組的克拉瑪公式）

試利用克拉瑪公式解下列各方程組：

(1) $\begin{cases} x+2y-3z=4 \\ 2x+4y-6z=7 \\ x+y+z=1 \end{cases}$。（6 分）　　(2) $\begin{cases} x+y+z=1 \\ 2x-y+2z=2 \\ 3x+2y+3z=3 \end{cases}$。（6 分）

解：(1) $\because \Delta=\begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 4 & -6 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}=0$，$\Delta_x=\begin{vmatrix} 4 & 2 & -3 \\ 7 & 4 & -6 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}=5\neq 0$

$\therefore$方程組無解

(2) $\Delta=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & 3 \end{vmatrix}=0$，$\Delta_x=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & 3 \end{vmatrix}=0$，

$\Delta_y=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{vmatrix}=0$，$\Delta_z=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & 3 \end{vmatrix}=0$

$\because \Delta=\Delta_x=\Delta_y=\Delta_z=0$，三平面的法向量皆不平行

$\therefore$方程組有無限多組解

令 $z=t$，則$\begin{cases} x+y=1-t \\ 2x-y=2-2t \end{cases}$ ⇨ $x=1-t$，$y=0$

故方程組的解為$\begin{cases} x=1-t \\ y=0 \\ z=t \end{cases}$，$t$ 為實數

例題 4

方程組$\begin{cases}\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=0\\[2mm] \dfrac{4}{x}+\dfrac{3}{y}+\dfrac{2}{z}=5\\[2mm] \dfrac{3}{x}+\dfrac{2}{y}+\dfrac{4}{z}=-4\end{cases}$，則下列選項哪些正確？（8 分）

(A)$x=1$　(B)$x=2$　(C)$y=-1$　(D)$y=1$　(E)$x+y+z=\dfrac{7}{6}$

解：令 $A=\dfrac{1}{x}$，$B=\dfrac{1}{y}$，$C=\dfrac{1}{z}$，則方程組可改寫成$\begin{cases}A+B+C=0\\4A+3B+2C=5\\3A+2B+4C=-4\end{cases}$

$\Delta=\begin{vmatrix}1&1&1\\4&3&2\\3&2&4\end{vmatrix}=-3$，$\Delta_A=\begin{vmatrix}0&1&1\\5&3&2\\-4&2&4\end{vmatrix}=-6$，

$\Delta_B=\begin{vmatrix}1&0&1\\4&5&2\\3&-4&4\end{vmatrix}=-3$，$\Delta_C=\begin{vmatrix}1&1&0\\4&3&5\\3&2&-4\end{vmatrix}=9$，利用克拉瑪公式得

$A=\dfrac{\Delta_A}{\Delta}=\dfrac{-6}{-3}=2=\dfrac{1}{x}$，$B=\dfrac{\Delta_B}{\Delta}=\dfrac{-3}{-3}=1=\dfrac{1}{y}$，$C=\dfrac{\Delta_C}{\Delta}=\dfrac{9}{-3}=-3=\dfrac{1}{z}$

$\therefore x=\dfrac{1}{2}$，$y=1$，$z=-\dfrac{1}{3}\Rightarrow x+y+z=\dfrac{7}{6}$，故選(D)(E)

例題 5

設方程組$\begin{cases}(2a+b+c)x+by+cz=0\\ax+(a+2b+c)y+cz=0\\ax+by+(a+b+2c)z=0\end{cases}$，除了 $x=0$，$y=0$，$z=0$ 外，尚有其他解，則下列選項何者正確？（8 分）

(A)$a=b=c$　(B)$a+b+c=1$　(C)$a+b+c=0$　(D)a，b，c 完全相異　(E)以上皆非

解：三元一次方程組，除了 $x=0$，$y=0$，$z=0$ 之外，尚有其他解，表示其解有無限多組解

$\Rightarrow \Delta=0$

$\Delta=\begin{vmatrix}2a+b+c&b&c\\a&a+2b+c&c\\a&b&a+b+2c\end{vmatrix}=0\Rightarrow\begin{vmatrix}2a+2b+2c&b&c\\2a+2b+2c&a+2b+c&c\\2a+2b+2c&b&a+b+2c\end{vmatrix}=0$

$\Rightarrow 2(a+b+c)\begin{vmatrix}1&b&c\\1&a+2b+c&c\\1&b&a+b+2c\end{vmatrix}=0\Rightarrow 2(a+b+c)\begin{vmatrix}1&0&0\\1&a+b+c&0\\1&0&a+b+c\end{vmatrix}=0$

$\therefore 2(a+b+c)^3=0\Rightarrow a+b+c=0$

故選(C)

例題 6

若 α 及 β 為兩實數，且聯立方程式 $\begin{cases}(1-\alpha)x+7y=1\\ x+y+\alpha z=\beta\\ 2\alpha y+z=0\end{cases}$ 有兩組以上的解，則：

(1) α 之值為______。（5 分）
(2) β 之值為______。（5 分）

解： 聯立方程式 $\begin{cases}(1-\alpha)x+7y=1\\ x+y+\alpha z=\beta\\ 2\alpha y+z=0\end{cases}$ 有兩組以上的解，表示此方程組有無限多組解

$\Rightarrow \Delta=\Delta_x=\Delta_y=\Delta_z=0$

(1) $\Delta=\begin{vmatrix}1-\alpha & 7 & 0\\ 1 & 1 & \alpha\\ 0 & 2\alpha & 1\end{vmatrix}=1-\alpha-2\alpha^2+2\alpha^3-7=0$

$\Rightarrow 2\alpha^3-2\alpha^2-\alpha-6=0 \Rightarrow \alpha=2$

(2) $\Delta_x=\begin{vmatrix}1 & 7 & 0\\ \beta & 1 & 2\\ 0 & 4 & 1\end{vmatrix}=1-8-7\beta=0$

$\therefore \beta=-1$

例題 7

解方程組 $\begin{cases}x+(1-a)y+z=1\\ x+y+(1-a)z=1\\ (1-a)x+y+z=1\end{cases}$，

(1) 若方程組有無限多組解，則 $a=$______。（5 分）
(2) 若方程組無解，則 $a=$______。（5 分）

解： $\Delta=\begin{vmatrix}1 & 1-a & 1\\ 1 & 1 & 1-a\\ 1-a & 1 & 1\end{vmatrix}=(3-a)\begin{vmatrix}1 & 1-a & 1\\ 1 & 1 & 1-a\\ 1 & 1 & 1\end{vmatrix}=a^2(3-a)$

若 $\Delta=0$，則 $a=0$ 或 3

(1) 當 $a=0$ 時，方程組 $\begin{cases}x+y+z=1\\ x+y+z=1\\ x+y+z=1\end{cases}$ 有無限多組解

(2) 當 $a=3$ 時，方程組 $\begin{cases}x-2y+z=1 \text{L L L L L L L L ①}\\ x+y-2z=1 \text{L L L L L L L L ②}\\ -2x+y+z=1 \text{L L L L L L L ③}\end{cases}$

由②－①及③＋①×2 得 $\begin{cases}3y-3z=0 \text{L L L L L L L L ④}\\ -3y+3z=3 \text{ L L L L L L ⑤}\end{cases}$

再由④＋⑤得 $0=3$，矛盾

故方程組無解

◎重點三　三平面幾何關係的代數判定

例題 8（三平面的幾何關係）

下列圖形代表空間中三個平面相交的情形：

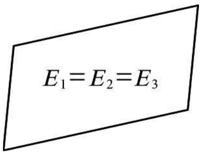

圖 1

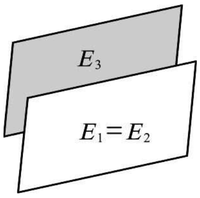

圖 2

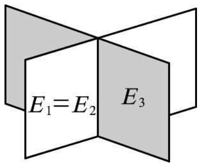

圖 3

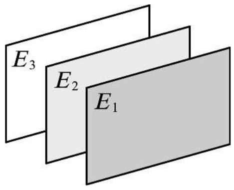

圖 4

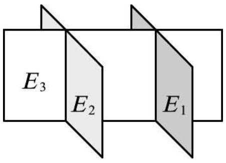

圖 5

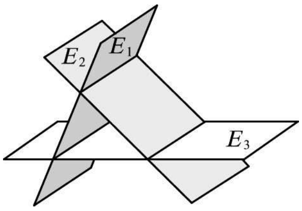

圖 6

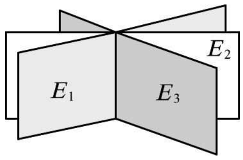

圖 7

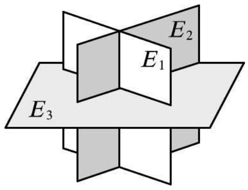

圖 8

判斷下列各方程組相交之情形，並在空格內，填入適當的圖號：

(1) $\begin{cases} x+y+z=6 \\ 2x-y+3z=9 \\ x+3y-z=4 \end{cases}$，圖______。（4 分）

(2) $\begin{cases} x+2y+z=2 \\ 2x+4y+2z=4 \\ 3x+y-2z=4 \end{cases}$，圖______。（4 分）

(3) $\begin{cases} x+2y-z=1 \\ 2x-y+2z=2 \\ 3x+y+3z=3 \end{cases}$，圖______。（4 分）

(4) $\begin{cases} 2x-y-z=1 \\ 4x-2y-2z=1 \\ x-2y-2z=2 \end{cases}$，圖______。（4 分）

解：(1) $\Delta=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & 3 & -1 \end{vmatrix}=1+6+3+1-9+2\neq 0$

$\therefore$方程組恰有一組解　$\therefore$相交於一點，故選圖 8

(2) $\because E_1$：$x+2y+z=2$，E_2：$2x+4y+2z=4$

$\therefore E_1=E_2$ 且與 E_3：$3x+y-2z=4$ 相交於一直線，故選圖 3

(3) $\Delta=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 3 \end{vmatrix}=-3+2+12+3-2-12=0$

$\begin{cases} x+2y+z=1 \text{ L L L L L L L L L L L L L L L ①} \\ 2x-y+2z=2\text{L L L L L L L L L L L L L L L ②} \\ 3x+y+3z=3 \text{ L L L L L L L L L L L L L L L ③} \end{cases}$

①＋②×2 得 $5x+5z=5$，即 $x+z=1$……………④

②＋③得 $5x+5z=5$，即 $x+z=1$ ………………⑤

由④、⑤可知，此方程組有無限多組解　$\therefore$三平面相交於一直線，故選圖 7

(4) $\because E_1$：$2x-y-z=1$，E_2：$4x-2y-2z=1$

$\therefore E_1 \,/\!/\, E_2$ 且與 E_3：$x-2y-2z=2$ 相交於一直線，故選圖 5

例題 9

空間中，有三平面 $2x+ay-z=1$，$4x-3y+3z=5$，$3x+y+z=b$ 相交於一直線 L，則 $a=$______，$b=$______。(8 分)

解： 相交於一直線 L ⇨ $\Delta=\Delta_x=\Delta_y=\Delta_z=0$

$$\Delta=\begin{vmatrix}2 & a & -1\\4 & -3 & 3\\3 & 1 & 1\end{vmatrix}=0 \Rightarrow -6-4+9a-9-6-4a=0 \quad \therefore a=5$$

$$\Delta_y=\begin{vmatrix}2 & 1 & -1\\4 & 5 & 3\\3 & b & 1\end{vmatrix}=0 \Rightarrow 10-4b+9+15-6b-4=0 \quad \therefore b=3$$

□**例題 10**

給定空間中四向量 $\vec{a}=(1,1,7)$，$\vec{b}=(5,-4,-3)$，$\vec{c}=(-2,1,-1)$，$\vec{d}=(7,-5,0)$。試問 $\vec{d}$ 是否可以表成 $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ 的線性組合，即 $\vec{d}=x\vec{a}+y\vec{b}+z\vec{c}$？若可以，請寫出其線性組合。(10 分)

解： 由 $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ 組成的 $\Delta=\begin{vmatrix}1 & 1 & 7\\5 & -4 & -3\\-2 & 1 & -1\end{vmatrix}=-3\neq 0$

所以 $\vec{d}$ 可以表成 $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ 的線性組合，又 $\vec{d}=x\vec{a}+y\vec{b}+z\vec{c}$

$(7,-5,0)=x(1,1,7)+y(5,-4,-3)+z(-2,1,-1)$

因此解 $\begin{cases}x+5y-2z=7\\x-4y+z=5\\7x-3y-z=0\end{cases}$，得 $x=2$，$y=3$，$z=5$

故 $\vec{d}=2\vec{a}+3\vec{b}+5\vec{c}$