1-4　外積、體積與行列式

重點一　空間向量的外積

例題 1

已知 $\vec{a}=(0,1,2)$，$\vec{b}=(2,1,0)$，試求：

(1) $\vec{a}\times\vec{b}=$________。（5 分）

(2) $3\vec{b}\times 2\vec{a}=$________。（5 分）

解：(1) $\vec{a}\times\vec{b}=\left(\begin{vmatrix}1&2\\1&0\end{vmatrix},\begin{vmatrix}2&0\\0&2\end{vmatrix},\begin{vmatrix}0&1\\2&1\end{vmatrix}\right)=(-2,4,-2)$

(2) $3\vec{b}=(6,3,0)$，$2\vec{a}=(0,2,4)$

$3\vec{b}\times 2\vec{a}=\left(\begin{vmatrix}3&0\\2&4\end{vmatrix},\begin{vmatrix}0&6\\4&0\end{vmatrix},\begin{vmatrix}6&3\\0&2\end{vmatrix}\right)=(12,-24,12)$

例題 2

已知 $\vec{a}=(1,0,1)$，$\vec{b}=(1,2,0)$，若 $\vec{e}$ 同時垂直與 $\vec{a}$ 與 $\vec{b}$，且 $|\vec{e}|=3$，試求 $\vec{e}$。（10 分）

解：(1) $\vec{a}\times\vec{b}=\left(\begin{vmatrix}0&1\\2&0\end{vmatrix},\begin{vmatrix}1&1\\0&1\end{vmatrix},\begin{vmatrix}1&0\\1&2\end{vmatrix}\right)=(-2,1,2)$

$\because$ $\vec{e}$ 同時垂直於 $\vec{a}$ 與 $\vec{b}$　$\therefore$ $\vec{e}\,/\!/\,\vec{a}\times\vec{b}$

⇨ $\vec{e}=t(\vec{a}\times\vec{b})=t(-2,1,2)$

又 $|\vec{e}|=3\Rightarrow\sqrt{(-2t)^2+t^2+(2t)^2}=3$ ⇨ $|t|\times 3=3$　$\therefore t=\pm 1$

故 $\vec{e}=(-2,1,2)$ 或 $(2,-1,-2)$

例題 3

空間中三點 $A(1,1,1)$，$B(0,1,2)$，$C(1,-1,0)$，試求：

(1) $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=$________。（4 分）

(2) $\overrightarrow{AB}$ 與 $\overrightarrow{AC}$ 所張出的平行四邊形面積為________。（8 分）

解：(1) $\overrightarrow{AB}=(-1,0,1)$，$\overrightarrow{AC}=(0,-2,-1)$，

$$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\left(\begin{vmatrix}0 & 1\\ -2 & -1\end{vmatrix},\begin{vmatrix}1 & -1\\ -1 & 0\end{vmatrix},\begin{vmatrix}-1 & 0\\ 0 & -2\end{vmatrix}\right)$$

$$=(2,-1,2)$$

(2) $\overrightarrow{AB}$ 與 $\overrightarrow{AC}$ 所張出的平行四邊形面積為

$$\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right|=\sqrt{2^2+(-1)^2+2^2}=3$$

例題 4

承例題 3，試求點 A 到直線 BC 的距離。（8 分）

解： $\overrightarrow{BC}=(1,-2,-2)\Rightarrow\left|\overrightarrow{BC}\right|=\sqrt{1^2+(-2)^2+(-2)^2}=3$

$\triangle ABC$ 的面積為 $=\left|\overrightarrow{BC}\right|\times$ 點 A 到直線 BC 的距離 $\times\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$

$\therefore$ 點 A 到直線 BC 的距離 $=\frac{3}{3}=1$

例題 5

空間中，已知 $|\vec{a}|=3$，$|\vec{b}|=5$，$\vec{a}\cdot\vec{b}=12$，試求 $|\vec{a}\times\vec{b}|$。（10 分）

解：$|\vec{a}\times\vec{b}|=\sqrt{|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2-(\vec{a}\cdot\vec{b})^2}=\sqrt{3^2\times5^2-12^2}=9$

◎重點二　三階行列式的定義與性質

例題 6（降階公式）

試求下列各行列式之值：

(1) $\begin{vmatrix} 2 & 2 & 7 \\ 4 & -3 & 5 \\ -1 & 2 & 6 \end{vmatrix}$。（5 分）　　(2) $\begin{vmatrix} 3 & 1 & -4 \\ -6 & -2 & 8 \\ 5 & 13 & 27 \end{vmatrix}$。（5 分）

解：(1) $\begin{vmatrix} 2 & 2 & 7 \\ 4 & -3 & 5 \\ -1 & 2 & 6 \end{vmatrix}=2\begin{vmatrix} -3 & 5 \\ 2 & 6 \end{vmatrix}-2\begin{vmatrix} 4 & 5 \\ -1 & 6 \end{vmatrix}+7\begin{vmatrix} 4 & -3 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}=-56-58+35=-79$

(2) $\begin{vmatrix} 3 & 1 & -4 \\ -6 & -2 & 8 \\ 5 & 13 & 27 \end{vmatrix}=3\begin{vmatrix} -2 & 8 \\ 13 & 27 \end{vmatrix}-\begin{vmatrix} -6 & 8 \\ 5 & 27 \end{vmatrix}-4\begin{vmatrix} -6 & -2 \\ 5 & 13 \end{vmatrix}=-474+202+272=0$

例題 7

試求行列式$\begin{vmatrix} 88 & 127 & -59 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} 12 & -27 & -41 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}$的值。(10 分)

解：$\begin{vmatrix} 88 & 127 & -59 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} 12 & -27 & -41 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}$

$=\begin{vmatrix} 88+12 & 127-27 & -59-41 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}$

$=100\times\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}$

$=100\times(2+9-2+6-6-1)$

$=100\times8=800$

例題 8

設$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}=10$，試求行列式$\begin{vmatrix} a_1+3a_2 & a_3 & 4a_3+a_2 \\ b_1+3b_2 & b_3 & 4b_3+b_2 \\ c_1+3c_2 & c_3 & 4c_3+c_2 \end{vmatrix}$的值。(10 分)

解：$\begin{vmatrix} a_1+3a_2 & a_3 & 4a_3+a_2 \\ b_1+3b_2 & b_3 & 4b_3+b_2 \\ c_1+3c_2 & c_3 & 4c_3+c_2 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_1+3a_2 & a_3 & a_2 \\ b_1+3b_2 & b_3 & b_2 \\ c_1+3c_2 & c_3 & c_2 \end{vmatrix}$

×(−4)　　×(−3)

$=\begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_2 \\ b_1 & b_3 & b_2 \\ c_1 & c_3 & c_2 \end{vmatrix}$

互換

$=-\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}=-10$

例題 9

試求 $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 5 \\ 4 & 9 & 25 \end{vmatrix} =$ ________。（10 分）

解： $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 5 \\ 2^2 & 3^2 & 5^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3-2 & 5-2 \\ 2^2 & 3^2-2^2 & 5^2-2^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3-2 & 5-2 \\ (3+2)(3-2) & (5+2)(5-2) \end{vmatrix}$

×（−1）
×（−1）

$= (3-2)(5-2)\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3+2 & 5+2 \end{vmatrix}$

$= (3-2)(5-2)(5-3)$

$= (2-3)(3-5)(5-2) = 6$

◎重點三　三階行列式的應用

例題 10

空間中有三向量 $\overrightarrow{OA} = (1, 2, 4)$，$\overrightarrow{OB} = (1, 3, 9)$，$\overrightarrow{OC} = (1, 4, 16)$，試求：

(1) 此三向量所張出的平行六面體體積。（6 分）

(2) 四面體 $O-ABC$ 的體積。（4 分）

解： (1) 平行六面體體積 $= \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \\ 1 & 4 & 16 \end{vmatrix}$ 的絕對值 $= |(2-3)(3-4)(4-2)| = 2$

(2) 四面體 $O-ABC$ 的體積 $= \dfrac{1}{6}\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \\ 1 & 4 & 16 \end{vmatrix}$ 的絕對值 $= \dfrac{1}{3}$