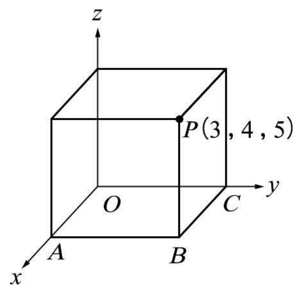
1-2　空間向量的坐標表示法

重點一　空間坐標系

例題 1

如右圖所示，P（3，4，5）在 x 軸、xy 平面、y 軸的正射影分別為 A、B、C，試問：



(1) A 點坐標為________，B 點坐標為________，
　C 點坐標為________。（6 分）

(2) $\overline{OP}=$________，$\overline{PC}=$________。（4 分）

解：(1) A（3 , 0 , 0），B（3 , 4 , 0），C（0 , 4 , 0）

(2) $\overline{OP}=\sqrt{3^2+4^2+5^2}=5\sqrt{2}$

$\overline{PC}=\sqrt{(3-0)^2+(4-4)^2+(5-0)^2}=\sqrt{34}$

例題 2

設 A（0 , 2 , 3），B（5 , 3 , 2），C（4 , 1 , 7），則△ABC 之重心坐標為________。（10 分）

解：△ABC 之重心坐標為 $\left(\dfrac{0+5+4}{3},\dfrac{2+3+1}{3},\dfrac{3+2+7}{3}\right)$

$=$（3 , 2 , 4）

例題 3

若點 P 到 x 軸的距離為 5，且 P 在 xy 平面的投影點為（2，－3，0），則 P 點坐標為________。（10 分）

解：P 在 xy 平面投影點為（2，－3，0）　∴P（2，－3，c）

P 在 x 軸垂足為 H（2，0，0）

由 $\overline{PH}=\sqrt{(2-2)^2+(-3-0)^2+(c-0)^2}=\sqrt{9+c^2}=5$，解得 $c=\pm 4$

故 P 點坐標為（2，－3，4）或（2，－3，－4）

例題 4

A 為空間直角坐標系中第一卦限的點，若 A 到 xy 平面的距離為 4，到 z 軸距離為 $\sqrt{74}$，到 y 軸距離為 $\sqrt{41}$，則 A 點坐標為________。（10 分）

解：設 A（a，b，c），$a>0$，$b>0$，$c>0$

依題意：$\begin{cases} c=4 \cdots\cdots(1) \\ \sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{74} \cdots\cdots(2) \\ \sqrt{a^2+c^2}=\sqrt{41} \cdots\cdots(3) \end{cases}$

將(1)代入(3)得 $a=5$，代入(2)得 $b=7$

∴A 點坐標為（5，7，4）

重點二　空間向量的加、減法與係數乘法

例題 5

設 $\vec{a}=(-1,0,5)$，$\vec{b}=(1,2,4)$，試求：

(1) $\left|\vec{a}-\vec{b}\right|$。（5 分）

(2) $\left|-\vec{a}+2\vec{b}\right|$。（5 分）

解：(1) $\vec{a}-\vec{b}=(-1-1,0-2,5-4)=(-2,-2,1)$

$\Rightarrow \left|\vec{a}-\vec{b}\right|=\sqrt{(-2)^2+(-2)^2+1^2}=3$

(2) $-\vec{a}+2\vec{b}=(1,0,-5)+(2,4,8)=(3,4,3)$

$\Rightarrow \left|-\vec{a}+2\vec{b}\right|=\sqrt{3^2+4^2+3^2}=\sqrt{34}$

例題 6

$A(1,13,2)$，$B(5,0,10)$，$C(-1,3,4)$，O 為原點，試求：

(1) $3\overrightarrow{AB}-4\overrightarrow{AC}=$________。（5 分）

(2) $ABCD$ 為平行四邊形，求 D 點坐標為________。（5 分）

解：(1) $3\overrightarrow{AB}=3(5-1,0-13,10-2)=(12,-39,24)$

$-4\overrightarrow{AC}=-4(-1-1,3-13,4-2)=(8,40,-8)$

$3\overrightarrow{AB}-4\overrightarrow{AC}=3\overrightarrow{AB}+(-4\overrightarrow{AC})$

$=(12+8,-39+40,24-8)$

$=(20,1,16)$

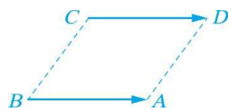
(2) 令 $D(x,y,z)$

利用 $\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{BA}$

$\Rightarrow (x+1,y-3,z-4)=(-4,13,-8)$

$\therefore x=-5$，$y=16$，$z=-4$

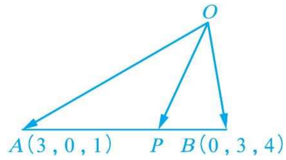
故 D 點坐標為 $(-5,16,-4)$



重點三　分點公式與線性組合

例題 7（分點公式）

坐標空間中，$A(3,0,1)$，$B(0,3,4)$，$P\in\overline{AB}$，$\overline{AP}:\overline{BP}=2:1$，則 P 點坐標為________。（10 分）



解：如右圖，利用分點公式得 P 點坐標為

$$\left(\frac{1\times3+2\times0}{2+1},\frac{1\times0+2\times3}{2+1},\frac{1\times1+2\times4}{2+1}\right)$$
$$=(1,2,3)$$

例題 8（分點公式）

坐標空間中，$A(4,1,13)$，$B(-1,6,5)$，$P\in\overleftrightarrow{AB}$，$\overline{AP}:\overline{BP}=3:1$，則 P 點坐標為________。（10 分）

解：$P\in\overleftrightarrow{AB}$

① 若 P 在 $\overline{AB}$ 上，如圖(一)，利用內分點公式得 P 點坐標為

$$\left(\frac{1\times4+3\times(-1)}{3+1},\frac{1\times1+3\times6}{3+1},\frac{1\times13+3\times5}{3+1}\right)=\left(\frac{1}{4},\frac{19}{4},7\right)$$

② 若 P 在 B 之外側，如圖(二)，

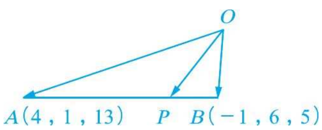
又 $\overline{AP}:\overline{BP}=3:1$　$\therefore\overline{AB}:\overline{BP}=2:1$

設 P 點坐標為 (x,y,z)，利用內分點公式得

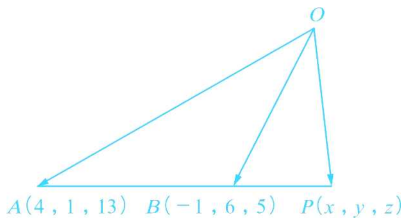
$$\left(\frac{1\times4+2\times x}{2+1},\frac{1\times1+2\times y}{2+1},\frac{1\times13+2\times z}{2+1}\right)=(-1,6,5)$$

$\Rightarrow (x,y,z)=\left(-\frac{7}{2},\frac{17}{2},1\right)$，得 P 點坐標為 $\left(-\frac{7}{2},\frac{17}{2},1\right)$

故 P 點坐標為 $\left(\frac{1}{4},\frac{19}{4},7\right)$ 或 $\left(-\frac{7}{2},\frac{17}{2},1\right)$



圖(一)



圖(二)

例題 9

坐標空間中，以知 $\overrightarrow{OA}=(1,3,1)$，$\overrightarrow{OB}=(0,2,-1)$，

(1) 若 $\overrightarrow{OC}=\frac{1}{3}\overrightarrow{OA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{OB}$，試描繪 C 的位置，並求 $\overrightarrow{OC}$ 的坐標表示。(6 分)

(2) 若 $\overrightarrow{OP}=s\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{OB}$，其中 $0\le s\le 2$，$0\le t\le 3$，試問所有 P 點所形成的圖形為何？(4 分)

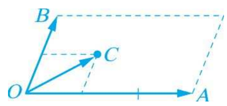
解：(1) $\overrightarrow{OC}=\frac{1}{3}(1,3,1)+\frac{1}{2}(0,2,-1)=\left(\frac{1}{3},2,-\frac{1}{6}\right)$，如圖(一)

(2) 如圖(二)所示

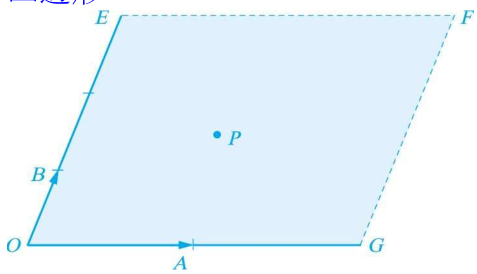
$\overrightarrow{OP}=s\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{OB}$，其中 $0\le s\le 2$，$0\le t\le 3$

$\overrightarrow{OP}$ 的終點落在平行四邊形 $OEFG$ 中（含邊界）

因此 P 點所形成的圖形為平行四邊形 $OEFG$

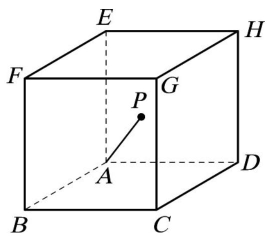


圖(一)



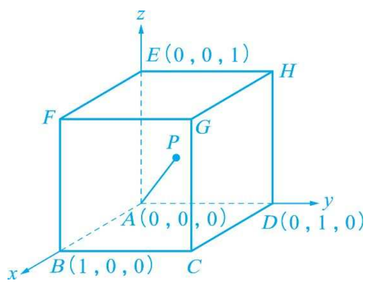
圖(二)

例題 10



如右圖所示，$ABCD-EFGH$ 為邊長等於 1 之正立方體。若 P 點在立方體之內部且滿足 $\overrightarrow{AP}=\frac{3}{5}\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AD}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AE}$，則 P 點至直線 AB 之距離為________。(10 分)

解：如右圖，建立坐標系



則 $\overrightarrow{AB}=(1,0,0)$，$\overrightarrow{AD}=(0,1,0)$，$\overrightarrow{AE}=(0,0,1)$

$\because \overrightarrow{AP}=\frac{3}{5}\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AD}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AE}$

$\therefore \overrightarrow{AP}=\frac{3}{5}(1,0,0)+\frac{2}{3}(0,1,0)+\frac{1}{2}(0,0,1)$

$=\left(\frac{3}{5},\frac{2}{3},\frac{1}{2}\right)$

⇨ P 點坐標為 $\left(\frac{3}{5},\frac{2}{3},\frac{1}{2}\right)$

因此 P 到直線 AB 之距離 $=P$ 到 x 軸之距離 $=\sqrt{\left(\frac{2}{3}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2}=\frac{5}{6}$